PHOTOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN

UEBER DIE

VERFINSTERUNGEN DER JUPITERSTRABANTEN.

Eine von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section
der philosophischen Facultät der Universität München

gekrönte Preisschrift.

Von

ERNST ANDING.

MÜNCHEN
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1889.

PHOTOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN

UEBER DIE

VERFINSTERUNGEN DER JUPITERSTRABANTEN.

Eine von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section
der philosophischen Facultät der Universität München

gekrönte Preisschrift.

Von

ERNST ANDING.

MÜNCHEN
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1889.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547425_0005

Vorbemerkung.

Gegenwärtige Abhandlung entstand gelegentlich der für den 30. April 1886 von der philosophischen Facultät der Universität München ausgeschriebenen Preisaufgabe, die Lichtcurve der Jupiterstrabanten bei ihren Verfinsterungen zu ermitteln, und zwar unter Zugrundelegung des Lambert'schen Gesetzes. Die Abhandlung bestand, einige später ausgearbeitete Zusätze mitgerechnet, im Ganzen aus vier Theilen:

1) Ueber die Principien der Photometrie.
2) Die Lichtcurve der Jupiterstrabanten nach dem Lambert'schen Gesetz.
3) Dieselbe Aufgabe unter Annahme verschiedener anderer photometrischer Gesetze.
4) Anwendung der gefundenen Resultate.

Den Hauptinhalt des ersten Theiles bildete eine kritische Untersuchung des Lambert'schen photometrischen Grundgesetzes für nicht selbstleuchtende Substanzen und ebenso der Lambert'schen Transparenzformel; das Ergebniss war die Verwerfung beider Gesetze, und es wurden statt ihrer durch strenge Verfolgung rein physikalischer Thatsachen zwei andere abgeleitet, welche ich als neu betrachten musste, da mir nicht bekannt war, dass nicht nur Herr Professor Seeliger das erstere derselben bereits gefunden und darüber ein halbes Jahr vor Einreichung meiner Abhandlung auf der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft zu Genf Mittheilung gemacht, sondern dass auch Herr Professor Lommel schon mehrere Jahre zuvor in einer Abhandlung in Poggendorf's Annalen zu demselben Resultat gelangt war.

Der zweite Theil beschäftigte sich speciell mit der von der Facultät gestellten Aufgabe. Der dritte Theil verwendete für die gestellte Aufgabe verschiedene solche Gesetze, welche für den Fall der vollen Beleuchtung eine gleiche scheinbare Helligkeit der ganzen Scheibe ergeben, u. A. das bereits erwähnte Lommel-Seeliger'sche Gesetz. Endlich der vierte Theil beschäftigte sich mit der Anwendung der gefundenen Resultate und enthielt u. A. eine Theorie der Verbesserung der Bahnelemente der Jupiterstrabanten.

Die Veröffentlichung des ersten Theiles würde jetzt zwecklos sein; aber auch die beiden letzten habe ich ausgeschlossen, in der Absicht, ihren hauptsächlichen Inhalt bei passenderer Gelegenheit zu publiciren. Gegenwärtige Schrift beschränkt sich also speciell auf die von der Facultät gestellte Aufgabe. Gleichwohl ist der allgemeinere Titel der Abhandlung nicht geändert, weil die hier vorgetragene Methode, besonders in der Behandlung der Phase sich mit Vortheil auch auf andere photometrische Gesetze anwenden lässt und weil ich hoffe alle allgemeinen Erwägungen so weit geführt zu haben, dass sich eine anderweitige Anwendung auf rein rechnerische Ausführung reducirt.

Sternwarte Bogenhausen bei München, Mai 1889.

Dr. E. Anding.

Die

Lichtcurve der Jupiterstrabanten

nach dem Lambert'schen Gesetz.

Die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten werden in der Astronomie vorzugsweise benutzt, um die Theorie ihrer Bewegung zu prüfen und um die Lichtzeit, bezw. die Sonnenparallaxe zu bestimmen, während man in der Praxis sich ihrer als Zeitsignale bedient, um angenäherte Längenbestimmungen, namentlich auf Reisen, auszuführen. Für beide Zwecke bedarf man einer genauen Fixierung des Eintrittsmomentes der Verfinsterung; da aber die Zeitdauer dieses Eintritts die beträchtliche Grösse von vier Minuten bis zu einer Viertelstunde erreicht, so muss man den Eintrittsmoment genauer definieren, und als solchen wählt man denjenigen Augenblick, in welchem der Trabant aufhört, sichtbar zu sein. Aber dieser Moment, an demselben Ort unter verschiedenen Umständen bestimmt, wird verschieden gefunden werden je nach der Natur des Instrumentes und der Person des Beobachters; an verschiedenen Orten ausgeführte Bestimmungen sind nicht streng vergleichbar wegen des verschiedenen Zustandes der Atmosphäre und der verschiedenen Elevation des Jupiter über dem Horizont, ferner spielt die scheinbare Entfernung des Trabanten vom Planeten eine Rolle, endlich entsteht, falls es sich um eine theoretische Verwerthung handelt, ausserdem noch eine Unsicherheit darüber, in welcher Entfernung von der Oberfläche des Schattens sich das Centrum des Trabanten im Moment des Verschwindens befindet. Allen diesen Schwierigkeiten begegnet der Vorschlag von Cornu, man solle

während der Dauer der Lichtabnahme so oft als möglich photometrische Messungen machen. Kennt man dann den analytischen Ausdruck für die Lichtstärke in jedem gegebenen Moment der Verfinsterung, so kann man umgekehrt genau den Zeitpunkt bestimmen, in welchem sich der Trabant in einem gewissen Stadium der Verfinsterung befand, wofür man am besten den Durchgang des Trabantenmittelpunkts durch die Fläche des Tangentenkegels wählt, welcher vom Centrum der Sonne aus an das Jupitersphäroid gelegt ist. Auf diese Weise erlangt der Ausdruck „Verfinsterung des Trabanten" die gewünschte Präcision. Es ist die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung, den erwähnten analytischen Ausdruck der Lichtstärke in Function der Zeit, den man kurz als Lichtcurve bezeichnen kann, abzuleiten und zwar bei Zugrundelegung des Lambert'schen photometrischen Gesetzes.

1.

Bei den nachstehenden Entwickelungen sollen folgende Voraussetzungen gemacht werden:

1) Der Körper des Trabanten werde in Ermangelung jeder anderweitigen Angabe als Kugel angesehen.

2) Das sogenannte aschfarbene Licht, welches Jupiter dem Trabanten zusendet, soll unberücksichtigt bleiben, da dessen Einfluss im Fall der Verfinsterungen ohne Belang ist.

3) Die Schwächung und die Refraction der Sonnenstrahlen durch die Jupiteratmosphäre werden als nicht vorhanden betrachtet. Denn obgleich bei unserer Aufgabe gerade die so beeinflussten Strahlen wesentlich in Betracht kommen, so fehlt doch einerseits jeder Anhaltspunkt für eine eingehende Betrachtung, andererseits heben sich beide Einflüsse gegenseitig zum grössten Theil auf, indem die am stärksten gebrochenen Strahlen auch das meiste an Intensität verloren haben.

4) Die Entfernungen Sonne-Trabant und Trabant-Erde sollen für die Dauer einer Verfinsterung als constant angesehen werden, was keiner Begründung bedarf.

5) Alle von einem beliebigen Punkt der Sonne ausgehenden einen beliebigen Punkt des Trabanten treffenden Strahlen sehen wir als parallel an zu dem Strahl, welcher die Mittelpunkte der Sonne und des Trabanten

verbindet. Die analoge Voraussetzung finde statt für die Strahlen, welche der Trabant nach der Erde sendet. Um den hieraus entspringenden Fehler abzuschätzen, bemerken wir, dass der Sonnenhalbmesser von Jupiter aus unter einem Winkel von 185″ erscheint und dass sich bei Zunahme irgend eines Winkels um diese Grösse der Cosinus desselben um höchstens 0.001 ändert; und wenn man für alle Strahlen, welche von der Sonne ausgehend, denselben Punkt des Trabanten treffen, den Mittelwerth des Cosinus des Incidenzwinkels bildet, so unterscheidet sich dieser höchstens nur um ein Milliontel seines Werthes vom Cosinus des Incidenzwinkels des vom Sonnenmittelpunkt kommenden Strahles.

Obwohl es bei der gegenwärtigen Genauigkeit photometrischer Messungen von 3 bis 4 Procent hinreichen würde, die Formeln bis auf 1 Procent genau zu geben, so wird sich doch zeigen, dass man ohne wesentliche Complication der Ausdrücke die Genauigkeit bis auf 0.001 steigern kann. Neben solchen strengeren Formeln sollen aber jedesmal die für die Praxis hinreichenden angeführt werden.

Auf der nach der Sonne hingewandten Halbkugel des Trabanten theilen sich im Allgemeinen drei Flächenstücke ab, die sich verschieden verhalten. Das eine liegt im Kernschatten, das zweite im Halbschatten, das dritte ist voll erleuchtet. Die Lichtquantität, welche ein Flächenelement des Trabanten von der Sonne erhält, ist also auch abgesehen von dem Einfluss des Incidenzwinkels eine Function seines Ortes auf dem Trabanten. Die von der Erde aus gesehene Halbkugel wird sich im Allgemeinen zusammensetzen aus einem Theile, welcher der eben betrachteten Halbkugel nicht angehört, also nicht erleuchtet erscheint, und einem Theile, der aus Theilen der drei früheren Abschnitte besteht, so dass also ein Theil der nach der Sonne hingewandten Halbkugel unsichtbar bleibt für die Erde. Denkt man sich für den Augenblick statt des Jupiter einen geradlinig berandeten, schattenwerfenden Schirm, und projicirt man die Fläche des Trabanten auf eine Ebene, die senkrecht ist zur Richtung Sonne-Jupiter, so stellt sich die Schattencurve, die ein einziger Punkt der Sonne werfen würde, als eine Gerade dar. Projicirt man dagegen die Fläche des Trabanten auf eine Ebene, die senkrecht ist zur Richtung Trabant-Erde, so ist die von einem einzigen Punkt der Sonne herrührende Grenzcurve eine Ellipse, deren Constanten sich

jedoch ändern, wenn sich der Ort des leuchtenden Punktes ändern würde. Bei den in unserer Aufgabe wirklich gegebenen Verhältnissen würde sich die Sache zu Ungunsten der letzteren Vorstellungsart noch wesentlich complicieren. Da es uns jedoch nicht darum zu thun ist, die geometrischen Verhältnisse des Schattens und Halbschattens so darzustellen, wie sie einem Beobachter auf der Erde erscheinen würden, wenn er sie mit dem Fernrohr verfolgen könnte, sondern da es sich hier nur um die der Erde zugewandte Lichtmenge als Ganzes handelt, so hat die letztere Auffassung durchaus keinen praktischen Werth. Nach diesen Erwägungen ist es geboten, folgende allein das Problem vereinfachende combinirte Auffassung zu Grunde zu legen:

> Die geometrischen Verhältnisse sind so darzustellen, wie sie ein Beobachter von der Sonne aus erblickt, d. h. wir projicieren die Fläche des Trabanten auf eine zur Richtung Sonne-Trabant senkrechte Ebene,
>
> die photometrischen Verhältnisse sind so darzustellen, wie sie ein Beobachter von der Erde aus erblickt, d. h. wir denken in jedem Punkt der erwähnten Projectionsebene die vom entsprechenden Punkte der Trabantenkugel nach der Erde gesandte Lichtmenge aufgetragen.

Mit dieser Auffassung ist die Lösung des Problems implicite gegeben.

Die projicirte Trabantenfläche theilt sich, wenn man den schattenwerfenden Körper vorläufig ausser Acht lässt, in einen Halbkreis und eine Halbellipse, deren sichelförmige Ergänzung zum Halbkreis von der Sonne erleuchtet wird, aber für die Erde unwirksam ist.

Durch einen beliebigen Punkt der Trabantenoberfläche einerseits und durch diejenigen zwei Punkte derselben Fläche, welche die Sonne und die Erde im Zenith haben, andererseits lege man zwei grösste Kreise, auf denen der Incidenzwinkel i und der Emanationswinkel ε gemessen werden. Das betrachtete Element schickt dann, entsprechend dem Lambert'schen Gesetze der Erde die Lichtmenge zu

$$1) \qquad dQ = C \cos i \cos \varepsilon \, df.$$

Es sollen nun folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Der Phasenwinkel, wie ihn Herr Professor Seeliger zu bezeichnen pflegt, heisse α, der Lambert'sche Phasenwinkel sei φ, so dass also $\alpha + \varphi = 180^0$.

Wir nennen ferner, zur projicirten Figur zurückkehrend, den Radius des Halbkreises R, die kleine Halbaxe der Ellipse b, die Projectionen der beiden der Sonne und der Erde gegenüberliegenden Punkte A und B, sodass also A in das Centrum des Halbkreises fällt. Wählt man dann die gerade Verbindungslinie von A und B zur Axe der x, ihre durch A gehende Senkrechte zur Axe der y, und nennt man x_0 die Abscisse von B, so hat man folgende Beziehungen:

2)
$$\cos i = \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \qquad \sin i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{R} \qquad \sin \alpha = \frac{x_0}{R}$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3)
$$\cos i \, df = dx \, dy,$$

denen man noch hinzufügen kann:

4)
$$b = R \cos \alpha$$
$$x_0 = R \sin \alpha.$$

Dann verwandelt sich mit Hilfe der Relation

$$\cos \varepsilon = \cos i \cos \alpha + \sin i \sin \alpha \cos \vartheta$$

die Gleichung 1) in die nachstehende Fundamentalgleichung des Problems:

I). $$dQ = C \cdot \frac{1}{R^2} (\sqrt{R^2 - x_0^2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + x_0 x) \, dx \, dy.$$

Dieser Ausdruck wäre zunächst für den vollerleuchteten Theil der Scheibe und ferner nach Multiplication mit einer gewissen Function F für den vom Halbschatten getroffenen Theil zu integrieren.

2.

Der Ausdruck für die Lichtstärke muss discontinuirlich werden, da die Projectionsfigur durch zwei verschiedene Curven begrenzt wird. Obgleich es wichtig und unter Benutzung zulässiger Voraussetzungen auch möglich ist, einheitliche Ausdrücke zu erhalten, so scheint es doch in

gewisser Beziehung instructiv, den Ausdruck in der vorstehenden Form zu integrieren unter den speciellen Voraussetzungen, dass statt der Sonne ein Punkt leuchte mit der Lichtstärke der Sonne, dass ferner statt des Jupiter ein geradlinig begrenzter Schirm als schattenwerfender Körper wirke, endlich, dass die Grenzlinie des Schattens parallel zur Axe der y sei.

Bezieht man die Buchstaben K und E auf Abschnitte des kreisförmigen und des elliptischen Flächenstückes, die Indices 1 und 2 auf das erste und das zweite Integral in I), so schreibt sich diese Gleichung folgendermassen:

$$5) \qquad Q = C \cdot \frac{1}{R^2}\{\sqrt{R^2 - x_0^2}(K_1 + E_1) + x_0(K_2 + E_2)\}.$$

Es ist nun zunächst:

$$6) \qquad K_1 = \int\int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int dx \left(\frac{y}{2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{R^2 - x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right).$$

Nach Einsetzung der Grenzen $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ geht dieser Ausdruck über in

$$7) \qquad K_1 = \frac{\pi}{2}\int dx\,(R^2 - x^2)$$

und die Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$ liefert endlich

$$8) \qquad K_1 = \frac{\pi}{2}(R^2 x - \frac{1}{3}x^3).$$

Setzt man dagegen in 6) für y die Grenzen ein:

$$y = \pm\frac{R}{b}\sqrt{b^2 - x^2},$$

so ergibt sich:

$$a) \qquad E_1 = \int_{x=-b}^{x=x} dx \left\{\frac{R}{b^2}\sqrt{R^2 - b^2}\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{x^2} + (R^2 - x^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{\sqrt{R^2 - b^2}}\sqrt{\frac{b^2}{x^2} - 1}\right\}$$

Schreibt man statt $\sqrt{x^2}$ einfach x, hält aber fest, dass für x immer der absolute Werth zu nehmen ist, so ergibt sich für das erste Integral in der Klammer der Ausdruck:

$$b) \qquad \frac{1}{3}(b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Bezüglich des zweiten Integrales setze man zunächst zur Abkürzung:

c) $$k = \frac{R}{\sqrt{R^2 - b^2}},$$

führe dann die Substitution ein:

d) $$x^2 = \frac{k^2 b^2}{k^2 + z^2},$$

mache aber betreffs des Vorzeichens eine analoge Bemerkung wie vorhin, sodass statt dx zu schreiben wäre:

$$+ \frac{k b z}{(k^2 + z^2)\sqrt{k^2 + z^2}} dz,$$

dann gestaltet sich unser Integral um zu

e) $$-k^3 b^3 \int \frac{z}{(k^2+z^2)^2 \sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z\, dz + R^2 k b \int \frac{z}{(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z\, dz.$$

Das zweite der hier vorkommenden Integrale lässt sich umformen gemäss der Gleichung:

$$\int \frac{z}{(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z = -\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{k^2+z^2}} + \int \frac{1}{1+z^2} \frac{1}{\sqrt{k^2+z^2}} dz$$

und wenn man die angedeutete Integration ausführt, so ergibt sich:

$$\int \frac{z}{(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z\, dz = -\frac{1}{k^2+z^2} \operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k^2-1}\, z}{\sqrt{k^2+z^2}}.$$

Für den ersten Theil in e) liefert dagegen theilweise Integration zunächst:

$$\int \frac{z}{(k^2+z^2)^2 \sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z\, dz$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1}{(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(1+z^2)(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}},$$

woraus man durch Ausführung der noch übrigen Integration findet:

$$\int \frac{z}{(k^2+z^2)^2 \sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z\, dz$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{k^2(k^2-1)} \frac{z}{\sqrt{k^2+z^2}} + \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k^2-1}\, z}{\sqrt{k^2+z^2}} - \frac{1}{(k^2+z^2)\sqrt{k^2+z^2}} \operatorname{arc\,tg} z \right).$$

Führt man in beiden Ergebnissen x wieder ein gemäss der Gleichung d) und setzt diese Ausdrücke in e) ein, so findet sich nach einigen Reductionen:

$$\frac{1}{3}\frac{kb^2}{k^2-1}\sqrt{b^2-x^2}+\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{k}{x}\sqrt{b^2-x^2}-R^2 x \operatorname{arc\,tg}\frac{k}{x}\sqrt{b^2-x^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{k^2-1}\sqrt{b^2-x^2}}{b}.$$

Nach Einführung der Grenzen $-b$ und x wird unter Benutzung der durch die Gleichungen c) und 4) gegebenen Relationen

$$k=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad k^2-1=\operatorname{cotg}^2\alpha \qquad b=R\cos\alpha$$

sich unser Ausdruck etwas reducieren, und wenn man weiterhin ihn mit dem oben gegebenen Ausdruck gemäss der Gleichung e) verbindet und das gefundene nach Massgabe der Gleichung a) mit dem Ausdruck in b) verknüpft, so findet man schliesslich:

$$9) \qquad E_1=\frac{1}{3}b^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos i}\sqrt{b^2-x^2}+\frac{1}{3}\frac{R}{b}\operatorname{tg}\alpha\sqrt{b^2-x^2}(b^2-x^2)$$
$$+\frac{2}{3}R^3 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{b}\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{b^2-x^2}\right)-\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x\sin\alpha}\sqrt{b^2-x^2}\right).$$

Wir kehren jetzt zur Gleichung 5) zurück und ermitteln die zwei noch übrigen Integrale K_2 und E_2, welche sich unter Zuziehung der für K_1 beziehungsw. E_1 benutzten Grenzen auf höchst einfache Weise ergeben als

$$10) \qquad K_2=-\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}R^3$$

und

$$11) \qquad E_2=-\frac{2}{3}\frac{R}{b}(b^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Es sei hervorgehoben, dass die Grössen K_1 und K_2 von $x=0$ an, die Grössen E_1 und E_2 von $x=-b$ an gerechnet sind und dass speciell E_1 als nur für negative x giltig abgeleitet ist. Dehnt man sodann die Ausdrücke für K_1 und K_2 bis auf $x=R$, diejenigen für E_1 und E_2 bis auf $x=0$ aus, so ergeben sich folgende vier Gleichungen, welche den Relationen 8) bis 11) correspondieren:

8)* $$K_1' = \frac{1}{3} R^3 \pi$$

9)* $$E_1' = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{3} R^3 \pi - \frac{2}{3} R^3 \alpha$$

10)* $$K_2' = \frac{2}{3} R^3$$

11)* $$E_2' = -\frac{2}{3} R^3 \cos^2\alpha.$$

Die vier Gleichungen 8) bis 11) und die vier entsprechenden 8)* bis 11)* geben verbunden mit 5) die Lichtquantität von der Ordinate $x = -b$ bis zur Ordinate $x = x$, so zwar, dass dieselbe sich für negative x ausdrückt durch

$$Q = C \frac{1}{R^2} \{ \sqrt{R^2 - x_0^2}\, E_1 + x_0 E_2 \},$$

für positive x dagegen durch

$$Q = C \frac{1}{R^2} \{ \sqrt{R^2 - x_0^2}\,(K_1 + E_1') + x_0 (K_2 + E_2') \}.$$

Würde speciell $x = R$ werden, so würde folgen

$$Q = C \frac{1}{R^2} \{ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,(K_1' + E_1') + x_0 (K_2' + E_2') \}$$

ein Ausdruck, der nach Substitution der durch 8)* bis 11)* gegebenen Werthe mit Benutzung der Relation: $\alpha + \varphi = 180^0$ und nach gehöriger Zusammenziehung übergeht in

12) $$Q = \frac{2}{3} C R^2 (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi),$$

welcher Ausdruck mit der Lambert'schen Beleuchtungsformel für Kugeln identisch ist.

3.

Von dem soeben betrachteten speciellen Fall unterscheidet sich der allgemeine, welcher für uns in Frage kommt, dadurch, dass bei ihm die Schattengrenze nicht mehr senkrecht von der Axe der x geschnitten wird, ferner dass dieselbe gekrümmt ist, endlich dass der Halbschatten hinzutritt. Die erwähnte Discontinuität werden wir erst am Schluss der Untersuchung in Betracht ziehen und demnach annehmen, dass alle

Theile des dem Trabanten entsprechenden Kreises in unserer Projectionsfigur nach Massgabe der Lambert'schen Formel und der Beschattungsverhältnisse Licht zur Erde hinsenden, und wir werden die Ausdrücke so aufstellen, dass sie auf Eintritte in den Schatten ohne Weiteres anwendbar sind. Die zwei Glieder der Grundformel I) sollen nun einzeln discutirt werden.

Das erste Glied in I) ist bei verschwindendem Phasenwinkel α zugleich das einzige und lässt sich mit Hilfe der zweiten Gleichung 4) so schreiben:

$$13) \qquad dQ_1 = C\cos\alpha\,\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\,dx\,dy.$$

Denkt man sich für den Augenblick die Schattengrenze als geradlinig und bemerkt, dass dieser Ausdruck von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist, so kann man die Axe der x senkrecht legen zu der Schattengrenze. Integrirt man dann die Gleichung 13) nach y zwischen den Grenzen $y = -\sqrt{R^2-x^2}$ und $y = +\sqrt{R^2-x^2}$, so folgt

$$14) \qquad \frac{\pi}{2}\,C\cos\alpha\,\frac{1}{R}\,(R^2-x^2)\,dx$$

und wenn man hier, nicht wie in dem früheren vorläufigen Beispiel von $x = -R$ bis $x = x$, sondern zwischen den Grenzen $x = x$ und $x = R$ integrirt, so hat man

$$\frac{\pi}{2}\,C\cos\alpha\,\frac{1}{R}\left(\frac{2}{3}\,R^3 - R^2x + \frac{1}{3}\,x^3\right),$$

dagegen ist für die Grenzen $-R$ und $+R$

$$15) \qquad Q_0 = \frac{2}{3}\,\pi\,C\cos\alpha\,R^2.$$

Um die Wirkungsweise des Halbschattens zu betrachten, denke man sich durch den geradlinigen Schirmrand eine Schaar von Ebenen gelegt, welche in beliebigen Abständen die Sonnenscheibe treffen. Dann schneiden diese Ebenen auf der mehrfach erwähnten Projectionsebene des Trabanten gerade Linien aus derart, dass längs einer jeden die Erleuchtung durch die Sonne constant ist. Von einem beliebigen Punkt des Schirmrandes projiciere man die Sonnenscheibe durch Centralprojection auf die Projectionsebene des Trabanten, wodurch ein Kreis entsteht, dessen Radius

R' heisse. Eine beliebige der erwähnten Geraden theilt diesen Kreis in zwei Theile, und der Inhalt E desjenigen Theiles, welcher nach der negativen Richtung hin liegt, ist proportional der Stärke der Erleuchtung längs der fraglichen Geraden. Innerhalb des Halbschattens ist also die Lichtwirkung eines Streifens, wie sie durch 14) gegeben ist, noch zu multiplicieren mit einer Function $F_0 = E : R'^2\pi$. Nun habe das Centrum des Kreises R' eine Abscisse $= \xi$ und seine Ordinate wählen wir $= 0$ und machen diesen Punkt zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems der z und y, welches dem früheren System parallel ist. Dann ist

$$16) \qquad F_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{z\sqrt{R'^2 - z^2}}{R'^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{z}{R'}$$

und man findet den Halbschatten, wenn man in 14) $x = \xi + z$ setzt, mit F_0 multiplicirt und zwischen den Grenzen $- R'$ und $+ R'$ integrirt. Der Einfluss des vollleuchtenden Theiles ergibt sich dann durch Integration von 14) zwischen den Grenzen $x = \xi + R'$ und $x = + R$.

Nun ist in Wirklichkeit der schattenwerfende Körper ein Sphäroid. An dasselbe legen wir vom Centrum der Sonne aus den Berührungskegel, unter dessen Erzeugungsgeraden sich eine befindet, welche vom Centrum des Trabanten den kürzesten Abstand hat. In dem Punkt, wo diese Gerade das Sphäroid berührt, legen wir eine berührende Kugel, die wir als Jupiterkugel bezeichnen, und deren Radius $= a$ sei, während die Sonne den Radius b habe und die Distanz der Mittelpunkte beider Kugeln Δ heisse. Senkrecht zur Centrallinie beider Kugeln legen wir eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Trabanten geht und wir fassen dieselbe auf, was keiner Begründung bedarf, als identisch mit der Projectionsebene des Trabanten. Ihre Entfernung vom Centrum der Jupiterkugel sei d. Dann schneidet der innere Berührungskegel der Jupiter- und der Sonnenkugel in der Projectionsebene einen Kreis aus, dessen Radius

$$= a\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{\Delta}\right)^2}} + d\frac{\frac{a+b}{\Delta}}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{\Delta}\right)^2}}$$

oder wenn man den Nenner, der sich um ein Milliontel von der Einheit unterscheidet, weglässt:

$$r'' = a + a\frac{d}{\Delta} + b\frac{d}{\Delta} = R'' + b\frac{d}{\Delta}.$$

Ein Beobachter auf diesem Kreis würde beide Gestirne in äusserer Berührung erblicken. Um die verschiedenen Kreise gleicher Erleuchtung zu erhalten, braucht man sich nur b variabel zu denken. So geht z. B. für Punkte auf einem Kreis, dessen Radius ein $b = 0$ entspricht, der Jupiterrand scheinbar durch das Centrum der Sonne, und für $b = -b$ erhält man den Kreis, welcher den Halb- und Kernschatten trennt. Das wichtigste ist, dass sich r'' proportional mit b ändert, d. h. mit der von der Projectionsebene aus gesehenen scheinbaren Distanz zwischen Jupiterrand und Sonnenmittelpunkt. Deshalb darf man jetzt vom Berührungspunkt der Jupiterkugel und des Jupitersphäroids aus wieder die Sonnenscheibe auf die Projectionsebene als einen Kreis vom Radius R' projicieren; von demselben Punkt aus projicieren wir ebenso denjenigen Kreis rückwärts, in welchem die Jupiterkugel die Sonnenscheibe scheinbar schneidet. Dann haben wir in der Projectionsebene:

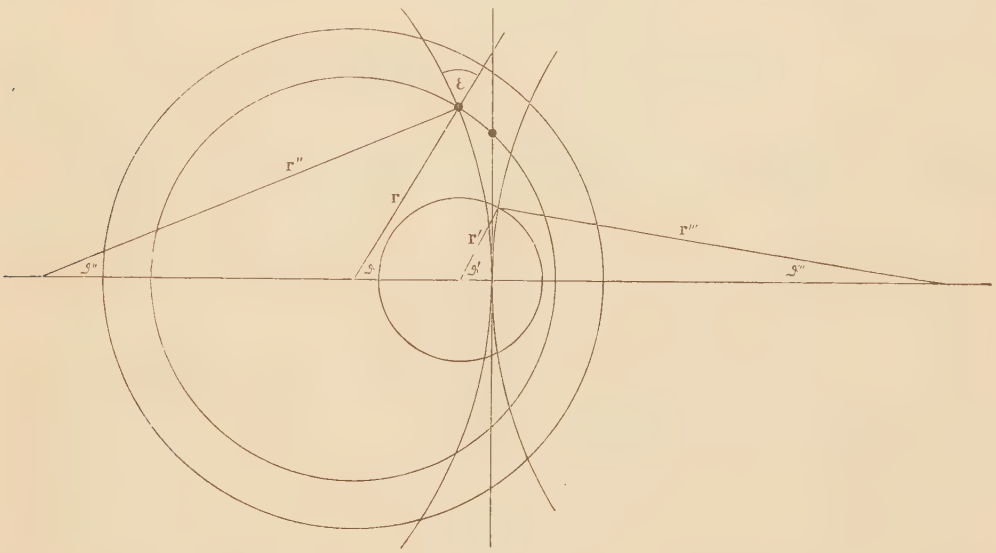
1) den Trabantenkreis mit Radius R,
2) den Sonnenkreis mit Radius R', dessen Centrum auf der Axe der x liege,
3) ein System von concentrischen Kreisen gleicher Erleuchtung mit den Radien $r'' = R'' + b\frac{d}{\Delta}$,
4) ein System von concentrischen Kreisen, deren jeder den Sonnenkreis derart in zwei Theile theilt, dass der auf der negativen Seite liegende Theil proportional ist der Stärke der Beleuchtung, welche der auf der x-Axe liegende Punkt dieses Kreises und mit ihm der entsprechende Kreis gleicher Erleuchtung von der Sonne empfängt. Die Radien dieser Kreise sind $r''' = R''' - b\frac{d}{\Delta}$, wo $R''' = R''$ gesetzt werden darf.

Um jetzt den Halbschatten zu ermitteln, wäre der Ausdruck

$$C \cos\alpha \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}$$

längs eines ringförmigen Streifens zwischen zwei concentrischen Kreisen gleicher Erleuchtung zu integrieren, sodann mit einer Function F zu multiplicieren, welche dem früheren F_0 entspricht, endlich nochmals zu

integrieren. Diese Rechnung kann man sich aber wesentlich erleichtern. Der vorstehende Ausdruck zeigt, dass gleich grosse Elemente, welche auf demselben um das Centrum des Trabanten mit einem Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ beschriebenen Kreise liegen, gleiche Lichtwirkungen äussern. Insbesondere gilt dies für diejenigen beiden Punkte, in welchen dieser Kreis einen



Kreis gleicher Erleuchtung, andererseits dessen Scheitelordinate schneidet. Vergleicht man also noch die beiden zugehörigen Flächenelemente $r'' dr'' d\vartheta''$ und $dx dy$ ihrer Grösse nach, so darf man, statt längs des Kreises gleicher Erleuchtung, auch längs dessen Scheitelordinate, d. h. so wie früher, integrieren.

Wählt man nun das dx des zweiten Elementes gleich dem dr'' des ersten, das dy des zweiten so, dass seine beiden Endpunkte auf denselben zwei concentrischen Kreisen mit Radien r und $r + dr$ liegen, wie die beiden Endpunkte des Bogenstückes $r'' d\vartheta''$, so hat man wegen

$$dr = dy \sin(\vartheta - n)$$
$$dr = r'' d\vartheta'' \cos\varepsilon$$

sofort die Gleichung

$$r'' dr'' d\vartheta'' = dx dy \cdot \frac{\sin(\vartheta - n)}{\cos\varepsilon}.$$

Demnach wird sich die vom Zwischenraum zwischen zwei benachbarten Kreisen herrührende Lichtmenge statt durch das Integral

$$dr'' \cdot C \cdot \frac{\cos\alpha}{R} \int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, r''\, d\vartheta''$$

wo sich die x und y auf Punkte des Kreises gleicher Erleuchtung beziehen, ausdrücken durch das folgende:

$$17) \qquad dx\, C \frac{\cos\alpha}{R} \int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, \frac{\sin(\vartheta - n)}{\cos\varepsilon}\, dy,$$

wo sich die x und y auf eine Gerade von der Abscisse x beziehen und die Grössen $\sin(\vartheta - n)$ und $\cos\varepsilon$ noch auszudrücken sind. Zunächst ist

$$\cos\varepsilon = \sin(90^0 - \varepsilon) = \sin(180^0 - \vartheta + \vartheta'') = \sin\vartheta\cos\vartheta'' - \cos\vartheta\sin\vartheta''$$

$$\begin{aligned} r r'' \cos\varepsilon &= r\sin\vartheta\, r''\cos\vartheta'' - r\cos\vartheta\, r''\sin\vartheta'' \\ &= r''\sin\vartheta'' \cdot r'\cos\vartheta'' - r\cos\vartheta\, r''\sin\vartheta'' \\ &= r''\sin\vartheta''(r'' - x). \end{aligned}$$

Durch Einsetzung des gefundenen Werthes

$$\cos\varepsilon = \frac{r'' - x}{r}\sin\vartheta''$$

in 17) geht letzteres über in

$$18) \qquad C\frac{\cos\alpha}{R}\frac{dx}{r'' - x}\int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{y}{\sin\vartheta''}\, dy.$$

Um auch $\sin\vartheta''$ auszudrücken, eliminieren wir aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r\cos\vartheta - r''\cos\vartheta'' &= x - r'' \\ r\sin\vartheta \qquad\qquad &= r''\sin\vartheta'' \end{aligned}$$

den Winkel ϑ, wodurch sich

$$19) \qquad \cos\vartheta'' = \frac{1 - \frac{x}{r''} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{r''^2}}{1 - \frac{x}{r''}}$$

ergibt. Nun ist $\frac{R}{r''}$ eine kleine Grösse; und wenn man sich die resultierende Lichtstärke nach Potenzen dieser Grösse entwickelt denkt, so wird es mehr als genug sein, in dieser Entwickelung bei der ersten

Potenz stehen zu bleiben, wie sich in der Folge zeigen wird. Hiernach genügt es, $\sin\vartheta''$ bis auf die zweite Ordnung genau darzustellen durch

$$20) \qquad \sin\vartheta'' = \frac{y}{r''}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{r''}\right)$$

oder bis auf die nullte Ordnung genau

$$\frac{1}{\sin\vartheta''} = \frac{r''}{y}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{r''}\right).$$

Setzt man dies in 18) ein, so verwandelt sich jener Ausdruck in

$$C\frac{\cos\alpha}{R}\frac{r''}{r''-x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{r''}\right)dx\int\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy$$

oder

$$C\frac{\cos\alpha}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{r''}\right)dx\int\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy.$$

Die Lichtwirkung des gekrümmten Streifens zwischen zwei benachbarten Kreisen gleicher Erleuchtung ist also auf ein Integral zurückgeführt, welches nach Form und Grenzen mit einem bereits bekannten übereinstimmt. Um nämlich zwischen den Grenzen $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ und $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ zu integrieren, braucht man nur den Ausdruck 14) zu beachten und zu bemerken, dass man

$$\frac{x}{r''}=\frac{x}{R''}$$

setzen darf, wodurch sich für den gesuchten Streifen ergibt:

$$21) \qquad C\frac{\pi}{2}\cos\alpha\frac{1}{R}(R^2-x^2)\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{R''}\right)dx.$$

Dieser Ausdruck muss nun einerseits, um die Wirkung des voll leuchtenden Theiles zu erhalten, nach x integriert werden zwischen den Grenzen $x=\xi+R'$ und $x=R$, andererseits ist er, um den Halbschatten zu finden, mit der Function F zu multiplicieren und dann zwischen den Grenzen $x=\xi-R'$ und $x=\xi+R'$ zu integrieren. Diese Rechnung kann man sich wieder wesentlich erleichtern; doch soll zuvor der Ausdruck für F aufgestellt werden.

Die Grösse F war proportional dem Inhalt des Flächenstückes, welches aus dem Kreise mit Radius R' ausgeschnitten wird durch einen Kreis

mit Radius $R''' = R''$, so zwar, dass das Centrum des Kreises (R''') in positiver Richtung vom Centrum des (R') liegt, wogegen von den zwei entstandenen Theilen des (R') der in negativer Richtung liegende in Betracht kommt. Demnach hat man sofort:

$$22)\quad F = \frac{1}{R'^2\pi}(R'^2\pi - R'^2\vartheta' + R'^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta' - R'''^2\vartheta''' + R'''^2 \sin\vartheta''' \cos\vartheta''')$$

Um diesen Ausdruck in eine anwendbare Form zu transformieren, führen wir wieder das Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt ξ, 0 ein, welcher mit dem Centrum des Kreises (R') zusammenfällt, und bezeichnen die Coordinaten eines Punktes dieses Kreises, bezogen auf dieses System, mit z, u. Die Elimination von ϑ' aus den Gleichungen

$$23)\quad \begin{aligned} R''' \cos\vartheta''' + R' \cos\vartheta' &= R''' + z \\ R' \sin\vartheta' &= R''' \sin\vartheta''' \end{aligned}$$

gibt

$$\cos\vartheta''' = 1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{R'''^2}\left(1 - \frac{z}{R'''} + \frac{z^2}{R'''^2} - \cdots\right)$$

und hieraus folgt, bis auf Glieder dritter Ordnung genau, der Reihe nach

$$24)\quad \begin{aligned} \cos\vartheta''' &= 1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{R'''^2} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{R'''^2}\frac{z}{u} \\ \sin\vartheta''' &= \frac{u}{R'''} - \frac{1}{2}\frac{u}{R'''}\frac{z}{R'''} + \frac{3}{8}\frac{u}{R'''}\frac{z^2}{R'''^2} - \frac{1}{8}\frac{u^3}{R'''^3} \\ \vartheta''' &= \frac{u}{R'''} - \frac{1}{2}\frac{u}{R'''}\frac{z}{R'''} + \frac{3}{8}\frac{u}{R'''}\frac{z^2}{R'''^2} + \frac{1}{24}\frac{u^3}{R'''^3} \end{aligned}$$

dann gibt die zweite der Gleichungen 23) mit Hilfe der zweiten 24)

$$25)\quad \vartheta' = \arcsin\left(\frac{u}{R'} - \frac{1}{2}\frac{u}{R'}\frac{z}{R'''} + \cdots\right) = \arcsin\frac{u}{R'} - \frac{1}{2}\frac{u}{R'''}.$$

Ferner liefert eine geeignete Combination der Gleichungen 23) sofort

$$R'''^2 \sin\vartheta''' \cos\vartheta''' + R'^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta' = R''' \sin\vartheta''' (R''' + z)$$

woraus mit Hilfe der zweiten Gleichung 24) folgt

$$26)\quad R'''^2 \sin\vartheta''' \cos\vartheta''' + R'^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta' = u R''' + \frac{1}{2} u z - \frac{1}{8}\frac{R'^2 u}{R'''}$$

Stellt man jetzt die in 25), 26) und der dritten Gleichung 24) gebenen Ausdrücke gemäss der Gleichung 22) zusammen, so findet

man, wenn man R'' statt R''' schreibt, bis auf Glieder erster Ordnung genau

$$27) \qquad F = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{z}{R'} + \frac{1}{\pi} \frac{z}{R'} \frac{u}{R'} + \frac{1}{3\pi} \frac{R'}{R''} \frac{u^3}{R'^3}.$$

Bezeichnet man jetzt in 21) den Factor von dx mit U, so findet man die Einwirkung des Halbschattens und des voll erleuchteten Theiles durch

$$28) \qquad Q_1 = \int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} U F \, dx + \int_{x=\xi+R'}^{x=R'} U \, dx$$

wenn der Halbschatten in seiner ganzen Breite auf der Trabantenscheibe liegt; dagegen ist die gesuchte Lichtmenge

$$\int_{x=\xi-R'}^{x=R'} U F \, dx$$

wenn er die Trabantenscheibe nur zum Theil bedeckt.

Im letzteren Fall bedarf man der folgenden allgemeinen Integrale, die für den gegenwärtigen und für spätere Fälle zusammengestellt werden mögen:

$$29) \begin{cases} \int z \sqrt{R'^2 - z^2} \, dz = -\frac{1}{3} (R'^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \\ \int z^2 \sqrt{R'^2 - z^2} \, dz = \frac{1}{8} R'^2 z \sqrt{R'^2 - z^2} - \frac{1}{4} z (R'^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} R'^4 \arcsin \frac{z}{R'} \\ \int z^3 \sqrt{R'^2 - z^2} \, dz = -\frac{2}{15} R'^2 (R'^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} z^2 (R'^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \\ \int z^4 \sqrt{R'^2 - z^2} \, dz = \frac{1}{16} R'^4 z \sqrt{R'^2 - z^2} - \left(\frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{8} R'^2 z\right) \left(R'^2 - z^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{16} R'^6 \arcsin \frac{z}{R'} \\ \int \arcsin \frac{z}{R'} \, dz = \sqrt{R'^2 - z^2} + z \arcsin \frac{z}{R'} \\ \int z \arcsin \frac{z}{R'} \, dz = \frac{1}{4} z \sqrt{R'^2 - z^2} - \frac{1}{4} R'^2 \arcsin \frac{z}{R'} + \frac{1}{2} z^2 \arcsin \frac{z}{R'} \\ \int z^2 \arcsin \frac{z}{R'} \, dz = \frac{1}{9} \left(2 R'^2 + z^2\right) \sqrt{R'^2 - z^2} + \frac{1}{3} z^3 \arcsin \frac{z}{R'} \end{cases}$$

$$29)\quad \begin{cases} \int z^3 \arcsin\frac{z}{R'}\,dz = \left(\frac{1}{16}z^3+\frac{3}{32}R'^2 z\right)\sqrt{R'^2-z^2}+\left(\frac{1}{4}z^4-\frac{3}{32}R'^4\right)\arcsin\frac{z}{R'} \\ \int (R'^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \left(\frac{5}{8}R'^2 z-\frac{1}{4}z^3\right)\sqrt{R'^2-z^2}-\frac{3}{8}R'^4\arcsin\frac{z}{R'} \\ \int z^2(R'^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \left(\frac{5}{48}R'^4 z-\frac{1}{24}R'^2 z^3\right)\sqrt{R'^2-z^2}-\frac{1}{6}z(R'^2-z^2)^{\frac{5}{2}} \\ \qquad\qquad +\frac{1}{16}R'^6\arcsin\frac{z}{R'}. \end{cases}$$

Mit diesen Hilfsmitteln kann man bei einiger Geduld einen höchst complicirten Ausdruck zusammensetzen, der aber keinen practischen Werth hat. Denkt man sich nämlich für den Augenblick den Phasenwinkel $\alpha = 0$ gesetzt, so lässt sich zeigen, dass die Lichtcurve bei $\xi = 0$ einen Wendepunkt hat, falls die Lichtwirkung nur eine Function von $\sqrt{x^2+y^2}$ ist. Das findet in der That statt beim Lambert'schen Gesetz und bei irgend einem Gesetz, welches für $\alpha = 0$ eine gleichförmig leuchtende Scheibe ergibt. Für $\xi = 0$ wird man also die Zeit aus den photometrischen Beobachtungen am sichersten bestimmen, dagegen um so unsicherer, je mehr sich ξ dem Rande nähert. Etwas ähnliches gilt, wenn α nicht null, aber doch klein ist.

Deshalb beschränken wir uns auf die Discussion des Ausdruckes 28) und machen dabei folgende Bemerkung. Durch theilweise Integration geht dieser Ausdruck über in

$$\left[F\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} U\,dx\right]-\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} dF\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} U\,dx+\int_{x=\xi+R'}^{x=R} U\,dx$$

Nun ist an der unteren Grenze des ersten Gliedes: $F = 0$, an der oberen: $F = 1$, folglich lassen sich das erste und das letzte Glied zusammenziehen, sodass man bei selbstverständlicher Bezeichnung statt 28) einfach hat

$$\int_{x=\xi-R'}^{x=R} U\,dx-\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} dF\int U\,dx$$

U ist durch 21) gegeben, und für dF hat man

$$30)\qquad \frac{dF}{dz} = \frac{2}{R'^2\pi}\sqrt{R'^2-z^2}-\frac{R'}{R''}\frac{1}{R'^3\pi}z\sqrt{R'^2-z^2}$$

Führt man jetzt die angedeuteten Integrationen mit Hilfe der Formeln 29) oder auch direct durch, so findet sich schliesslich

$$Q_2 = C\frac{\pi}{2}\cos\alpha\,\frac{1}{R}\Big[\frac{2}{3}R^3 - R^2\xi + \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}R'^2\xi + \frac{R}{R''}\Big(\frac{1}{8}R^3 + \frac{1}{16}RR'^2 - \frac{1}{192}\frac{R'}{R}R'^3 - \frac{1}{4}R\xi^2 + \frac{1}{16}\frac{R'}{R}R'\xi^2 + \frac{1}{8}\frac{\xi}{R}\xi^3\Big)\Big]$$

und wenn man, da nur die relative Helligkeit in Betracht kommt, mit dem Q_0 der Gleichung 15) dividirt, und statt ξ jetzt x schreibt, so folgt

31)
$$h_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{x}{R} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{R^3} + \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2}\frac{x}{R} + \frac{3}{16}\frac{R}{R''}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{R'^2}{R^2} - \frac{1}{48}\frac{R'^4}{R^4} - \frac{x^2}{R^2} + \frac{1}{4}\frac{R'^2}{R^2}\frac{x^2}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{R^4}\Big)$$

und hier bedeutet x, wie kaum zu bemerken nöthig ist, die in unserer Projectionsebene gemessene kürzeste Entfernung des Trabantenmittelpunktes von derjenigen Schattencurve, welche der Mittelpunkt der Sonne, als allein leuchtend gedacht, entwerfen würde, und zwar ist x positiv genommen, wenn der Trabantenmittelpunkt auf der concaven Seite dieser Schattencurve liegt.

4.

Nunmehr ist das zweite Glied der Hauptgleichung I) zu betrachten, welches man mit Hilfe der zweiten Gleichung 4) schreiben kann

$$dQ_2 = C\sin\alpha\,\frac{x}{R}\,dx\,dy$$

Die Axe der x in unserer Projectionsebene war vom Centrum der Trabantenscheibe aus durch die Projection desjenigen Punktes gelegt, welcher die Erde im Zenith hat. Zur Vereinfachung führe man aber jetzt ein Coordinatensystem ein, dessen Axe der x, zunächst in ihrem negativen Theil, durch das Centrum des Kreises mit Radius R'' geht. Sind beide Coordinatensysteme um den Winkel ε gegeneinander geneigt, so hat man statt der vorigen Gleichung jetzt

$$dQ_2 = C\sin\alpha\cos\varepsilon\,\frac{x}{R}\,dx\,dy - C\sin\alpha\sin\varepsilon\,\frac{y}{R}\,dx\,dy$$

und man sieht sofort, dass das zweite Glied bei der Integration verschwindet, während man sich die Integration des ersten Gliedes durch die Bemerkung erleichtern kann, dass der Factor $x\,dx\,dy$, über den leuchtenden Theil hin integrirt, den Inhalt dieses Flächenstückes, multiplicirt mit der x-Coordinate seines Schwerpunkts darstellt, und diese Grösse kann man durch elementare Betrachtungen leicht ermitteln. Misst man nämlich die Winkel ϑ_1 und ϑ_1'' an denselben Punkten, wie in der Figur die Winkel ϑ und ϑ'', bezieht sie aber auf den Schnittpunkt des Kreises vom Radius R'' mit dem Kreis, dessen Radius nicht r, sondern R ist, bezeichnet man ferner den dem Winkel $2\,\vartheta_1$ entsprechenden Sectorinhalt mit S, den zugehörigen Dreieckinhalt mit Δ, und das Moment eines Flächenstückes K bezogen auf die Axe der y mit (Kx), sind endlich die entsprechenden, aber auf den Winkel $2\,\vartheta_1''$ bezogenen Grössen S'', Δ'', (Kx''), sodass also das Centrum des Kreises (r'') der Anfangspunkt eines Coordinatensystems der x'' wird, so ist die gesuchte Grösse

$$U = (Sx) - (\Delta x) - (S''x) + (\Delta''x) = (Sx) - (\Delta x) - (S''x'') + (\Delta''x'') + (S'' - \Delta'')(r'' - x)$$

Da man nun weiss, dass

$$(Sx) = \frac{2}{3} R^3 \sin\vartheta_1 \qquad (S''x'') = \frac{2}{3} r''^3 \sin\vartheta_1''$$

$$(\Delta''x'') = \frac{2}{3} R^3 \sin\vartheta_1 \cos^2\vartheta_1 \quad (\Delta''x'') = \frac{2}{3} r''^3 \sin\vartheta_1'' \cos^2\vartheta_1''$$

$$S'' - \Delta'' = r''^2(\vartheta_1'' - \sin\vartheta_1'' \cos\vartheta_1'')$$

so folgt sofort

$$U = \frac{2}{3} R^3 \sin^3\vartheta_1 - \frac{2}{3} r''^3 \sin^3\vartheta_1'' + (r'' - x) r''^2 (\vartheta_1'' - \sin\vartheta_1'' \cos\vartheta_1'').$$

Nun ist bis zur vierten Ordnung genau

$$\vartheta_1'' - \sin\vartheta_1'' \cos\vartheta_1'' = \frac{2}{3} \sin^3\vartheta_1''$$

folglich hat man, wie früher, bis zur ersten Ordnung genau

$$U = \frac{2}{3} R^3 \sin^3\vartheta_1 - \frac{2}{3} x r''^2 \sin^3\vartheta_1''$$

Schreibt man aber in 25) und der zweiten Gleichung 24)

statt der Grössen: $z \quad u \quad R' \quad R''' \quad \vartheta' \quad \vartheta'''$

bezw. die Grössen: $-x \quad y \quad R \quad R'' \; 180^0 - \vartheta_1 \quad \vartheta_1''$,

so wird

$$\sin^3 \vartheta_1 = \frac{y^3}{R^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{R}{R''}\frac{x}{R}\right) \qquad \sin^3 \vartheta_1'' = \frac{y^3}{R''^3}$$

mithin ist

$$32) \qquad U(x) = \frac{2}{3} y^3 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{R''}\frac{x}{R}\right)$$

Demnach hat man parallel zu Gleichung 28) jetzt

$$Q_2 = C \sin\alpha \cos\varepsilon \frac{1}{R}\left(-\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R} \frac{dU}{dx} F\, dx + U(\xi + R)\right)$$

und wenn man ebenso, wie bei Betrachtung des ersten Gliedes, auch hier theilweise integrirt, so zieht sich dieser Ausdruck zusammen in

$$Q_2 = C \sin\alpha \cos\varepsilon \frac{1}{R}\int_{x=\xi-R'}^{x=\xi+R'} U \frac{dF}{dx}\, dx.$$

Entnimmt man nun aus 30) und 32) die Ausdrücke

$$\frac{dF}{dz} = \frac{2}{R'^2\pi}\sqrt{R'^2 - z^2} - \frac{R'}{R''}\frac{1}{R'^3\pi} z \sqrt{R'^2 - z^2}$$

$$U = \frac{2}{3}[R^2 - (\xi + z)^2]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3R''}(\xi + z)[R^2 - (\xi + z)^2]^{\frac{3}{2}}$$

und setzt sie in die vorstehende Formel für Q_2 ein, so findet man nach selbstverständlichen Reductionen

$$33) \quad Q_2 = \frac{4}{3} C \sin\alpha \cos\varepsilon \frac{1}{RR'^2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\xi}{R''}\right)\int_{-R'}^{+R'} [R^2 - (\xi + z)^2]^{\frac{3}{2}} \sqrt{R'^2 - z^2}\, dz.$$

Unter dem Integralzeichen führen wir jetzt die neue Variable $\zeta = \frac{z}{R'}$ ein und dividieren, um wieder auf relative Helligkeit zu kommen, die

ganze Gleichung mit dem Ausdruck für Q_0, welcher durch 15) gegeben ist. Schreibt man dann wieder x statt ξ, so ergibt sich, ebenso wie h_1 dem ersten Glied der Grundgleichung I) entsprach, jetzt als dem zweiten Glied entsprechend

$$34) \quad h_2 = \frac{2}{\varkappa^2} \operatorname{tg} \alpha \cos \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{R''} \frac{x}{R}\right) \int_{-1}^{+1} \left[1 - \left(\frac{x}{R} + \frac{R'}{R} \zeta\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \zeta^2}\, d\zeta$$

wo nun x dieselbe Bedeutung hat wie in dem Ausdrucke für h_1.

Eine strenge Reduction des vorstehenden Integrales auf die Normalformen elliptischer Integrale führt zu Monstrositäten, welche für die Praxis unbrauchbar sind. Dagegen kann man in der Erwägung, dass es die Anwendung vorzugsweise mit kleinen x zu thun hat, d. h. solchen x, welche dem Maximum des absoluten Werthes dieser Grösse bei

$$\frac{x}{R} = \frac{R - R'}{R}$$

nicht zu nahe kommen, eine Reihenentwickelung des ersten Factors unter dem Integralzeichen eintreten lassen, welche nach Potenzen von $\frac{R'}{R}$ fortschreitet. Hiernach verwandelt sich das obige Integral, wenn man abkürzend setzt

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \zeta^n \sqrt{1 - \zeta^2}\, d\zeta$$

in die Reihe

$$\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} J_0 - 3 \frac{x}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \frac{R'}{R} J_1 - \frac{3}{2!} \frac{1 - 2\frac{x^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} \frac{R'^2}{R^2} J_2$$

$$+ \frac{3}{3!} \frac{3\frac{x}{R} - 2\frac{x^3}{R^3}}{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \frac{R'^3}{R^3} J_3 + \frac{9}{4!} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \frac{R'^4}{R^4} J_4 + \ldots .$$

Da nun allgemein

$$J_{2n-1} = \int_{-1}^{+1} \zeta^{2n-1} \sqrt{1 - \zeta^2}\, d\zeta = 0$$

$$J_{2n} = \int_{-1}^{+1} \zeta^{2n} \sqrt{1-\zeta^2}\, d\zeta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\,\pi}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)\,2}$$

so wird durch Einsetzung in 34) bei gehöriger Zusammenfassung

$$35) \quad h_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \cos \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{R''} \frac{x}{R}\right) \left[\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{16} \frac{1 - 2\frac{x^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} \frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{64} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \frac{R'^4}{R^4} + \ldots \right]$$

Diese Reihe wendet man, falls x klein ist, mit besonderem Vortheil beim ersten Trabanten an; sie genügt auch noch beim zweiten und dritten in den meisten Fällen, wird aber beim vierten wegen des grossen $\frac{R'}{R}$ meist unbrauchbar. Indessen kann man nicht nur in denjenigen Fällen, wo die vorstehende Entwickelung nicht mehr genügend convergirt, sondern auch überhaupt ein hinreichend genaues Resultat erzielen, wenn man an die Stelle des ersten Factors unter dem Integralzeichen in 34) den Ausdruck setzt

$$(1-\zeta)(1+\zeta)\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\zeta(\zeta+1)\left[1 - \left(\frac{x}{R} + \frac{R'}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\zeta(\zeta-1)\left[1 - \left(\frac{x}{R} - \frac{R'}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

welcher mit jenem Factor für die Werthe $\zeta = 0$ und $\zeta = \pm \frac{R'}{R}$ übereinstimmt. In diesem Falle gibt die Integration

$$36) \quad h_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \cos \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{R''} \frac{x}{R}\right) \left[\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} \left\{ \left(1 - \overline{\frac{x}{R} - \frac{R'}{R}}^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 - \overline{\frac{x}{R} + \frac{R'}{R}}^2\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right].$$

Würde man z. B. den Halbschatten vernachlässigen, d. h. $R' = 0$ setzen, so würden sich sowohl der Ausdruck 35) wie der Ausdruck 36) in gegenseitiger Uebereinstimmung auf das erste Glied der eckigen Klammer reducieren.

5.

Bevor man die Formeln 31) und 35) bezw. 36) verbinden kann, um das Endresultat herzustellen, sind noch zwei Erwägungen erforderlich.

Zunächst haben wir stets, um die absolute Lichtstärke auf die Lichtstärke des unverfinsterten Trabanten als Einheit zu reducieren, die Ausdrücke für die absoluten Helligkeiten mit einer Grösse Q_0 dividirt, welche der Helligkeit des unverfinsterten Trabanten nur näherungsweise entspricht. Da nun der strenge Ausdruck dieser Grösse

$$Q_0' = \frac{2}{3} C R^2 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) = \frac{2}{3} C R^2 (\pi\cos\alpha + \sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

heisst, so sind die rechten Seiten der Gleichungen 31) und 35) bez. 36) noch zu multiplicieren mit

$$37) \quad \frac{Q_0}{Q_0'} = \frac{\pi\cos\alpha}{\pi\cos\alpha + \sin\alpha - \alpha\cos\alpha} = 1 - \frac{\alpha^3}{3\pi} + \text{Glieder fünfter Ordnung.}$$

Ferner soll gezeigt werden, wie man auf die früher erwähnte Discontinuität Rücksicht nehmen kann. Die bisherigen Entwickelungen waren nämlich so aufgestellt, als ob die ganze, in der Projectionsebene abgebildete Kreisscheibe des Trabanten, soweit sie nicht durch den Schatten bedeckt ist, nach Massgabe der Gleichung I) Licht zur Erde hinsende; was aber nicht der Fall ist, weil die früher erwähnte sichelförmige Ergänzung ausgeschlossen werden muss. Kehren wir also zum Coordinatensystem der Gleichung I) zurück und nehmen wir, was keiner Begründung bedarf, an, dass man hier vom Halbschatten und von der Krümmung des Schattens absehen könne, so werden die früheren Formeln für h_1 und h_2 dann aufhören, streng zu gelten, wenn zum erstenmal ein Schnittpunkt der Schattengrenze und des Kreises vom Radius R die Abscisse 0 hat. Deshalb suchen wir den Einfluss desjenigen Theiles der sichelförmigen Ergänzung, dessen Begrenzung markirt ist einerseits durch die Spitze der Sichel, andererseits durch den Schnittpunkt der geradlinigen Schattengrenze mit dem Trabantenkreis. Zu diesem Zweck schreiben wir die Gleichung I) in Polarcoordinaten r und ϑ, wobei der Anfangspunkt der r identisch ist mit dem früheren Anfangspunkt, und ϑ von der positiven Richtung der Axe der y aus umgekehrt gezählt ist, als der Zeiger der Uhr läuft, unter Rücksicht auf die Gl. 4) in der Form

$$dQ = C\frac{1}{R}(\cos\alpha\sqrt{R^2 - r^2} - r\sin\alpha\sin\vartheta)\,r\,dr\,d\vartheta.$$

Hieraus wird durch Integration nach r

$$38) \qquad -\frac{1}{3}C\frac{1}{R}(\cos\alpha\,(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + \sin\alpha\sin\vartheta\,r^3)\,d\vartheta$$

wobei sich die untere und die obere Grenze r_0 und r_1 bestimmen durch

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{R^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{R^2\cos^2\alpha} \qquad r_1 = R$$

oder wegen der Kleinheit des α durch

$$r_0^2 = R^2(1 - \sin^2\alpha\sin^2\vartheta) \qquad r_1 = R.$$

Substituirt man diese Grenzen in 38) und dividirt man mit Q_0, so erhält man

$$-\frac{1}{4\pi}\sin^3\alpha\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

und hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und ϑ, wenn man noch das Zeichen umkehrt, um den so berechneten Fehler in eine Correction zu verwandeln, schliesslich

$$39) \qquad h_3 = \frac{1}{48\pi}\sin^3\alpha\,(8 - 9\cos\vartheta + \cos 3\,\vartheta).$$

Wenn man dann die Variable x so versteht wie in den Gleichungen 31) und 35), so ist entweder ϑ gleich demjenigen der beiden Ausdrücke

$$+\varepsilon - \arcsin\frac{x}{R}$$

$$-\varepsilon - \arcsin\frac{x}{R}$$

zu setzen, welcher positiv ist, oder, wenn beide Ausdrücke positiv sind, so ist die Correction h_3 für jeden derselben zu bilden, oder, wenn keiner positiv ist, so ist die Correction überhaupt wegzulassen. Für $\varepsilon > 90^0$ erleidet diese Vorschrift eine leicht ersichtliche Modification.

Beispielsweise gibt $\vartheta = 180^0$ ein $h_3 = \frac{1}{3\pi}\sin^3\alpha$, wie man auch aus 37) hätte schliessen können. Es mag noch erwähnt sein, dass man statt dieser directen Herleitung von h_3 sich auch der Entwickelungen 5) bis 11) hatte bedienen können.

Um jetzt alles zusammenzufassen, hätten wir die Function

$$h = (h_1 + h_2)\left(1 - \frac{\sin^3\alpha}{3\pi}\right) + h_3$$

zu bilden. Da es aber keinen Sinn hat, die Lichtstärke schärfer darzustellen, als bis auf 0.001 der Helligkeit des vollerleuchteten Trabanten, so kann man sich noch einige Kürzungen erlauben, wenn man beachtet, dass α im Maximum etwa $= 11^0$ ist und wenn man auf folgende Ueberschlagswerthe Rücksicht nimmt

Trabant	I	II	III	IV
$\frac{R'}{R}$	0.2	0.3	0.3	0.68
$\frac{R}{R''}$	0.03	0.02	0.04	0.03

Hiernach kann man einmal die zwei zuletzt ermittelten Correctionen 37) und 39) weglassen, sodann auch in den Ausdrücken für h_1 und h_2 einiges kürzen. Dann folgt

$$\text{II)}\quad h = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{x}{R} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{R^2} + \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2}\frac{x}{R} + \frac{3}{32}\frac{R}{R''}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\frac{R}{R''}\frac{x}{R}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \begin{cases} \text{entweder} & -\frac{3}{16\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\left(\frac{1 - 2\frac{x^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}\frac{R'^2}{R^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{R'^4}{R^4} - \cdots\right) \\ \text{oder} & +\frac{1}{8\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\left(\left(1 - \frac{x}{R} - \frac{R'}{R}\right)^3 - 2\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{x}{R} + \frac{R'}{R}\right)^3\right). \end{cases}$$

Hier beziehen sich die drei ersten Glieder auf den einfachsten Fall des geradlinigen Kernschattens ohne Rücksicht auf die Phase, das vierte Glied gibt den Einfluss des Halbschattens, das fünfte den der Krümmung, das sechste die Phase im einfachsten Fall, das siebente Krümmung bei Berücksichtigung der Phase, das letzte den Halbschatten in diesem Fall.

Würde man sich mit einer Genauigkeit von 0.01 begnügen, so könnte man weit einfacher schreiben:

$$\text{II}^*) \quad h = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{x}{R} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{R^3} + \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2}\frac{x}{R} + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

6.

Nunmehr sind die photometrischen Betrachtungen erledigt und es soll jetzt die Variable x als Function der Zeit dargestellt werden. Wir denken uns vom Centrum der Sonne aus einen Berührungskegel an das Jupiterellipsoid gelegt und schneiden denselben mit einer durch das Jupitercentrum gehenden, zur Kegelaxe senkrechten Ebene; ferner verbinden wir Sonnen- und Trabanten-Mittelpunkt durch eine gerade Linie, welche in der erwähnten Ebene einen Punkt ausschneidet. Dann lassen sich in dieser Ebene an der gegenseitigen Lage einerseits des Einschneidepunkts der Geraden mit der bezeichneten Ebene, andrerseits des Kegelschnitts, den der Berührungskegel ausschneidet, alle Beziehungen demonstrieren. Bewege sich der Trabant zunächst geradlinig; sein Radius heisse R, die Entfernung seines Mittelpunktes C vom Schnittpunkt P seiner Bahn mit der Jupiterellipse heisse δ, positiv gezählt nach dem Inneren jener Ellipse; der Krümmungskreis in P habe den Radius R'', die kürzeste Entfernung von C bis zur Peripherie des Krümmungskreises sei u, positiv von Innen gezählt, das Perpendikel vom Krümmungscentrum auf die Bahn sei p, und die Entfernung seines Fusspunktes von P sei l, endlich sei η der Winkel zwischen R'' und l. Dann hat man

$$\begin{aligned}(R'' - u)^2 &= p^2 + (l - \delta)^2\\ R''^2 \qquad &= p^2 + l^2\end{aligned}$$

also durch Subtraction, und wenn man benutzt $l = R''\cos\eta$

$$40) \qquad 2\frac{u}{R} - \frac{R}{R''}\frac{u^2}{R^2} = 2\cos\eta\frac{\delta}{R} - \frac{R}{R''}\frac{\delta^2}{R^2};$$

u entspricht dem früheren x, δ dem t, und R'' würde der früheren Grösse R'' dann entsprechen, wenn man den Krümmungsradius desjenigen Ellipsenpunktes genommen hätte, welcher vom Trabantencentrum den kürzesten Abstand hat. Es ist aber bei einer Ellipse in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise:

$$R'' = \frac{1}{ab}(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{ab}(b^2 + \frac{a^2}{b^2}e^2y^2)^{\frac{3}{2}}$$

mithin

$$\Delta R'' = -\frac{1}{ab}\sqrt{a^2 - e^2x^2} \cdot 3\,e^2x\,\Delta x = \frac{1}{ab}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{b^2}e^2y^2} \cdot 3\,\frac{a^2}{b^2}e^2y\,\Delta y$$

also hat uan, da die Abplattung des Jupiter 1 : 16 beträgt, dem absoluten Werthe nach nahezu

$$\Delta R'' = 0.4\frac{x}{a}\Delta x = 0.4\frac{y}{a}\Delta y.$$

Eine der beiden Grössen Δx und Δy ist aber immer kleiner als R, mithin ist stets

$$\Delta R'' < 0.4\,R.$$

Wir vernachlässigen also in

$$\frac{R}{R'' + \Delta R''}$$

bei Weglassung von $\Delta R''$ eine Grösse, welche kleiner ist als $0.4\,R^2 : R''^2$, mithin darf man die verschiedenen Krümmungsradien als gleich gross ansehen mit dem Krümmungsradius desjenigen Punktes der Ellipse, welchen das Centrum des Trabanten auf seinem Wege passirt.

Bezeichnet man das Verhältniss $R : R''$ als eine kleine Grösse der ersten Ordnung, so kann man die Abplattung als Grösse derselben Ordnung ansehen. Heisst nun u' die kürzeste Entfernung vom Trabantencentrum C bis zur Ellipsenperipherie, so ist, die Dimension der Ellipse als nullter Ordnung betrachtet, der hiedurch markirte Fusspunkt um eine Grösse erster Ordnung von P entfernt, mithin würde $u' - u$ im Allgemeinen von der dritten Ordnung sein; diese Grösse wird aber gegen den Durchmesser des Trabanten, welcher erster Ordnung ist, dadurch vernachlässigbar, dass $u' - u$ infolge der kleinen Abplattung höherer Ordnung wird. In der That findet man, wenn man als Gleichungen der Ellipse zu Grunde legt: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, durch einige Rechnung, welche, da vom Resultat kein Gebrauch gemacht wird, nicht angeführt werden soll, dass näherungsweise:

$$u' - u = \frac{1}{2}\,a\,\Delta\varphi^3\,e^2\sin\varphi\cos\varphi;\quad \Delta\varphi = \sin\eta\frac{\delta}{a}.$$

Es folgt also, dass der erwähnte Krümmungskreis nicht nur hinsichtlich seiner Dimension, sondern auch bezüglich seiner Lage unseren Bedürfnissen genügt.

Bisher wurde angenommen, der Trabant, d. h. dessen Mittelpunkt bewege sich geradlinig in unserer Normalebene. Die wirkliche Bahn ist jedoch eine Ellipse, die Projection der Trabantenbahn. Die bei der geradlinigen Bahn benutzte Bezeichnung behalten wir bei, wenden sie aber jetzt an auf die Tangente der krummlinigen Bahn in P. Statt der projicirten Bahnellipse werde jedoch deren Krümmungskreis benutzt, dessen Radius ϱ sei. Der Bogen vom Punkt P bis zum Punkt C heisse s, wieder positiv nach Innen gezählt, und die kürzeste Entfernung des C von der Peripherie des Kreises (R'') heisse x. Dann ist x identisch mit der früher bei den photometrischen Entwickelungen benutzten Variablen und man hat näherungsweise:

$$x - u = \frac{m}{\sin \eta}; \quad m = \varrho\left(1 - \cos\frac{s}{\varrho}\right)$$

mithin

41) $$u = x - \frac{1}{2} s \frac{s}{\varrho} \frac{1}{\sin \eta}$$

und ebenso findet sich

42) $$\delta = s - \frac{1}{2} s \frac{s}{\varrho} \operatorname{cotg} \eta$$

und diese Ausdrücke wären in die Gleichung 40) einzuführen, sobald noch s durch t ausgedrückt ist. Zu letzterem Zweck beachte man nur, dass der Trabant sich in der Projectionsellipse, da die kleine Excentricität der Bahnellipse nicht in Betracht kommt, mit constanter Sectorengeschwindigkeit bewegt, wenn die Spitze des Sectors im Centrum der Ellipse gedacht wird. Die wahre Trabantenbahn werde also angesehen als ein Kreis vom Radius a; die kleine Axe der Projectionsellipse dieses Kreises ist also $a \sin \psi$, wenn ψ die Höhe der Sonne über der Bahnebene des Trabanten bedeutet. Bei dieser Gelegenheit setzen wir gleichzeitig fest, dass die Axen des Jupitersphäroides von jetzt ab mit a_0 und b_0, die Axen der projicirten Jupiterscheibe mit a_0 und b_0' bezeichnet werden sollen. Das gemeinsame Centrum O der beiden Ellipsen (a_0, b_0') und $(a, a \sin \psi)$ sei von dem Centrum des Kreises (ϱ) um Δ entfernt, der Winkel zwischen ϱ und Δ heisse w, die Strecke OP heisse R_1'', und der Winkel

zwischen R_1'' und der Tangente in P an die Trabantenellipse sei η_1; dann hat man für den Sector S:

$$43) \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{\sin\psi\, a^2\pi}{T'}$$

wenn T' die Umlaufszeit bedeutet. Legt man jetzt den Krümmungskreis (ϱ) zu Grunde, so ist

$$dS = \frac{1}{2} n\, ds; \qquad n = \varrho - \Delta \cos\left(w - \frac{s}{\varrho}\right)$$

und es folgt durch Einsetzen in 43) und durch Integration, wenn bei $s = 0$ auch $t = 0$ sein soll:

$$2\pi \sin\psi\, a^2 \frac{t}{T'} = \varrho s - \varrho\Delta \cos w \sin\frac{s}{\varrho} - \varrho\Delta \sin w \left(1 - \cos\frac{s}{\varrho}\right)$$

oder, wenn man die Ausdrücke

$$\Delta \sin w = R_1'' \cos\eta_1$$
$$\Delta \cos w = \varrho - R_1'' \sin\eta_1$$

einsetzt und sodann entwickelt

$$2\pi \sin\psi\, a^2 \frac{t}{T'} = R_1'' \sin\eta_1 \cdot s - \frac{1}{2} R_1'' \cos\eta_1 \cdot s \frac{s}{\varrho} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{R_1''}{\varrho}\sin\eta_1\right) \cdot s^2 \frac{s}{\varrho}$$

und wenn das letzte Glied vernachlässigt wird

$$44) \qquad \frac{2\pi \sin\psi\, a^2}{R_1'' \sin\eta_1} \frac{t}{T'} = s - \frac{1}{2} \operatorname{cotg}\eta_1 \cdot s \frac{s}{\varrho}$$

und hier stimmt die rechte Seite mit derjenigen von 42) überein, wenn, was erlaubt ist, $\eta = \eta_1$ gesetzt wird. Bezeichnet man dann mit φ die excentrische Anomalie des Punktes P, bezogen auf die scheinbare Bahnellipse, so ist

$$\operatorname{tg}\eta_1 = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi \sin\varphi \cos\varphi}$$

und wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tg}\chi = \sin\psi \operatorname{tg}\varphi$$

so folgt

$$R_1'' \cos\chi = a \cos\varphi.$$

Wenn man dann einerseits in die linke Seite von 44) die soeben gefundenen Werthe von R_1'' und $\sin\eta_1$ einsetzt, andererseits die linken Seiten von 42) und 44) mit einander vergleicht, so hat man

$$2\pi\frac{t}{T'}=\frac{R}{a}\frac{\cos\eta_1}{\cos^2\psi\sin\varphi\cos\chi}\frac{\delta}{R}.$$

Nun definieren wir eine Grösse T so, dass

45) $$2\pi\cos\eta\frac{T}{T'}=\frac{R}{a}\frac{\cos\eta_1}{\cos^2\psi\sin\varphi\cos\chi}$$

und dann ergibt sich einfach

46) $$\frac{t}{T}=\cos\eta\frac{\delta}{R}.$$

Werden jetzt in die Gleichung 40) oder

$$\frac{u}{R}-\cos\eta\frac{\delta}{R}=\frac{1}{2}\frac{R}{R''}\left(\frac{u^2}{R^2}-\frac{\delta^2}{R^2}\right)$$

zuerst der Ausdruck für δ aus 46), sodann derjenige für u aus 41) mit Benutzung von 42) und 46) eingesetzt, so hat man

47) $$\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\frac{R}{R''}\left(1-\frac{R''}{\varrho\sin\eta}\right)\frac{1}{\cos^2\eta}\frac{t^2}{T^2}=\frac{x}{R}-\frac{1}{2}\frac{R}{R''}\frac{x^2}{R^2}$$

Offenbar liegt die Zeitdauer des Eintrittes der Verfinsterung zwischen $x=-R$ und $x=+R$. Sei im ersteren Falle $t=-t'$, im letzteren $t=+t''$ Setzt man dies nacheinander in 47) ein, und subtrahirt das erste Substitutionsresultat vom zweiten, so folgt unter Vernachlässigung erst des Quadrates von $R:R''$, dass $t'+t''=2T$, d. h. es bedeutet $2T$ die Dauer des Eintrittes. Man kann bemerken, dass diese Bedeutung dann wegfällt, wenn das zweite Glied in 47) gegen das erste wesentlich in Betracht kommt, dass jedoch die Gleichung 47) für alle η giltig bleibt und die Definition 45) stets einen Sinn behält.

In den meisten Fällen wird man die Formel 47) in eine Reihe entwickeln dürfen

48) $$\frac{t}{T}=\frac{x}{R}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\eta\frac{R}{R''}\frac{x^2}{R^2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\eta}{\cos^2\eta}\frac{R^2}{R''^2}\frac{x^3}{R^3}-\frac{1}{2}\frac{R}{R''}\frac{q}{\cos^2\eta}\frac{x^2}{R^2}+\ldots;\quad q=\frac{R''}{\varrho\sin\eta}.$$

Nimmt man, um q im ungünstigsten Fall näherungsweise zu bestimmen, $R_1''=R''$ und $\eta=\chi$ an, und schreibt den Krümmungshalbmesser der Ellipse $(a, a\sin\psi)$ in der Form:

$$\varrho=\frac{a\sin^3\varphi}{\sin\psi}(1+\sin^2\psi\operatorname{cotg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}$$

so wird unter Vernachlässigung von $\sin^2\psi$

$$q = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}.$$

Nun ist das Maximum von $\cos\varphi$, d. h. beim ersten Trabanten, etwa $= 0.2$ oder $\varphi = 80^0$, man darf also auch schreiben $q = \cos^2\varphi$; das letzte Glied in 48) wird mithin

$$\frac{1}{2}\frac{R}{R''}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\eta}\frac{x^2}{R^2}$$

d. h. in den Fällen, welche eine Reihenentwickelung zulassen, ist das von der Krümmung herrührende vierte Glied überhaupt unmerklich.

Um ferner einen Ueberschlag über den Einfluss der anderen Glieder in 48) zu erlangen, nehme man die Bahnen der Trabanten in der Aequatorebene Jupiters an. Mit Hilfe der Laplace'schen Werthe für $a : a_0$ und der Neigung des Jupiteräquators gegen die Jupiterbahn $= 3^0\,4'$ berechne man einen Winkel η durch die Formel $\sin\eta = \frac{a}{a_0}\sin 3^0\,4'$, welchen man mit dem früheren η identificieren kann. Ich finde

$$\eta = 17^0\,45'; \qquad 29^0\,1'; \qquad 50^0\,41'; \qquad \text{imaginär};$$

d. h. der vierte Trabant kann unverfinstert bleiben. Ferner geben die Engelmann'schen Werthe: $2R = 1''.08$, 0.91, 1.54, 1.08 und der Werth $2R'' =$ kleiner Durchmesser $= 35.2$ das Verhältniss

$$\frac{R}{R''} = 0.031 \qquad 0.026 \qquad 0.044 \qquad 0.036$$

und hieraus folgen als Maximalgrössen der doppelten Coëfficienten in 48)

	Trabant I	II	III
zweites Glied:	0.0031	0.0080	0.0652
drittes Glied:	0.0001	0.0003	0.0071

Beim vierten Trabanten kann η alle möglichen Werthe annehmen und die Reihe 48) ganz unzulänglich werden, in welchem Falle man auf die Gleichung 47) zurückgehen muss. Derartige Verfinsterungen wird man jedoch schon deshalb nicht zu einer Bestimmung des Verfinsterungsmomentes benutzen, weil nach Gleichung 45) T sehr gross wird und dadurch jene Bestimmung der Natur der Sache nach höchst unsicher ausfällt.

Nunmehr können wir die Beziehung zwischen der früheren Variablen x, der absoluten Zeit t der Beobachtung und der absoluten Zeit τ des Durchganges des Trabantenmittelpunktes durch den Tangentialkegel vom Sonnenmittelpunkt an das Jupitersphäroid in folgender Weise darstellen:

III) $$\frac{t-\tau}{T} - \frac{1}{2}\frac{R}{R''}\left(1 - \frac{R''}{\varrho \sin\eta}\right)\frac{1}{\cos^2\eta}\frac{(t-\tau)^2}{P^2} = \frac{x}{R} - \frac{1}{2}\frac{R}{R''}\frac{x^2}{R^2}$$

III a) $$2\pi\frac{T}{T'} = \frac{R}{a_0}\frac{a_0}{a}\frac{\cos\eta_1}{\cos\eta}\frac{1}{\cos^2\psi\sin\varphi\cos\chi}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\psi\operatorname{tg}\chi$$

$$\varrho = a\frac{\sin^3\varphi}{\sin\psi}(1+\sin^2\psi\operatorname{cotg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Bleibt man dagegen bei einer Genauigkeit von 0.01 stehen, so hat man für die einzelnen Trabanten

III)* Trabant I: $$\frac{t-\tau}{T} = \frac{x}{R}$$

II: $$\frac{t-\tau}{T} = \frac{x}{R}$$

III: $$\frac{t-\tau}{T} = \frac{x}{R} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\eta\frac{R}{R''}\frac{x^2}{R^2}$$

IV: $$\frac{t-\tau}{T} = \frac{x}{R} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\eta\frac{R}{R''}\frac{x^2}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\eta}{\cos^2\eta}\frac{R^2}{R''^2}\frac{x^3}{R^3};$$

bis zu $\chi = 75^0$ bis 80^0 anwendbar.

III a)* Trabant I: $$2\pi\frac{T}{T'} = \frac{R}{a_0}\frac{a_0}{a}\frac{\cos\eta_1}{\cos\eta}\frac{1.016}{\cos\chi}$$

Trabant II, III, IV: $$2\pi\frac{T}{T'} = \frac{R}{a_0}\frac{a_0}{a}\frac{\cos\eta_1}{\cos\eta}\frac{1}{\cos\chi}$$

7.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe ist jetzt noch erforderlich, zu zeigen, wie die im Vorigen enthaltenen variablen und constanten Hilfsgrössen berechnet werden. Die ersteren beziehen sich theils auf die photometrischen, theils auf die Bewegungserscheinungen. Als photometrische Grössen treten zwei Winkel auf, die bei jedem Problem ähnlicher Art in Betracht kommen, nämlich einmal der Phasenwinkel α,

welcher für die Stärke der totalen Beleuchtung, sodann der Winkel ε, welcher für die Vertheilung der Helligkeit massgebend ist, und welchen man als Azimuth bezeichnen könnte. Geometrische Hilfsgrössen dagegen sind die Winkel ψ, χ, η, η_1. Als constante Grössen sind endlich zu bestimmen die Verhältnisse $R:R'$, $R:R''$, $R:a_0$.

Alle hierauf bezüglichen Vorschriften lassen sich am bequemsten ausführen, wenn man für die Planetenörter die Connaissance des Temps, für die Trabantenörter die Bessel'schen Tafeln (Bestimmung der Masse des Jupiter, Astronomische Untersuchungen, 2. Bd.) zur Verfügung hat. Diese Tabellen sollen also zu Grunde gelegt werden.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Phasenwinkels. Wenn man in dem Dreieck: Sonne S, Erde E, Jupiter J, den Winkel an der Sonne α', denjenigen an der Erde β, und den Winkel an Jupiter α nennt; wenn man ferner mit L und B die heliocentrischen, mit l und b die geocentrischen Längen und Breiten bezeichnet, und wenn man die Indices s, e und i auf Sonne, Erde und Jupiter bezieht, so hat man sofort

$$49) \quad \begin{aligned} \cos\alpha' &= \cos B_i \cos(L_i - L_e) \\ \cos\beta &= \cos b_i \cos(l_i - l_s) \\ \alpha &= 180^0 - \alpha' - \beta \end{aligned}$$

α' und β zwischen 0^0 und 180^0.

Führt man aber die Distanzen Δ ein, so ist

$$50) \quad \begin{aligned} \cos\alpha' &= \cos B_i \cos(L_i - L_e) \\ \delta &= \frac{\Delta(SE)}{\Delta(EJ)} \\ \sin\alpha &= \delta \sin\alpha'. \end{aligned}$$

Die anderen variablen Hilfsgrössen würde man sehr einfach bestimmen können, wenn nicht die besonderen Verhältnisse des vierten Trabanten eine genaue Untersuchung nöthig machten. Zu diesem Behufe verbindet man zweckmässig die Berechnung von ε einerseits mit derjenigen von ψ, χ, η, η_1 andererseits.

Zunächst definieren wir die Lage der Bahnebene des Trabanten und die Coordinaten desselben. Wir unterscheiden dabei wahre und scheinbare Bahn, wahren und scheinbaren Ort.

Die wahre Lage der Bahnebene sei gemäss der Bezeichnungsweise der Bessel'schen Tafeln gegeben durch die Knotenlänge N und die Neigung J, der wahre Ort des Trabanten durch die Länge v und die Breite s. Die Längen werden dabei in der Jupiterbahn gezählt, und von ihr aus werden auch Neigung und Breite gemessen.

Nun projicieren wir die Figur auf die frühere Projectionsebene, welche senkrecht steht auf der centralen Verbindungslinie: Sonne, Jupiter. Hierdurch entsteht die scheinbare Trabantenbahn und der scheinbare Trabantenort. In unserer Normalebene messen wir nun am Centrum der scheinbaren Bahn, vom Einschnitt der Jupiterbahn aus bis zur grossen Axe der scheinbaren Trabantenbahn, umgekehrt gezählt, als der Zeiger der Uhr läuft, den Winkel λ, von hier aus bis zum scheinbaren Radiusvector des Trabanten den Winkel χ, und wir setzen $\omega = \lambda + \chi$.

Bezeichnet man noch mit ψ die Höhe der Sonne über der wahren Trabantenbahn, so verhalten sich die Axen der scheinbaren Bahn zu einander wie 1 zu $\sin\psi$; und dann wird der Uebergang von den Bestimmungsstücken der wahren Bahn (N, J) zu denjenigen der scheinbaren (λ, ψ) vermittelt durch die Gleichungen, bei welchen L die Länge des Jupiter in seiner Bahn bedeutet:

51)
$$\sin\psi = \sin J \sin(L - N)$$
$$\sin\lambda = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}(L-N)} = -\frac{\cos(L-N)}{\cos\psi}\sin J$$

und aus dem wahren Ort des Trabanten (v, s) bestimmt sich der scheinbare $(\omega$, bez. $\chi)$ durch

52)
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg} s}{\sin(L - v)}$$
$$\chi = \omega - \lambda$$

und hieraus folgt dann

53)
$$\operatorname{tg}\tau = \sin^2\psi \operatorname{cotg}\chi$$
$$\eta_1 = \chi + \tau.$$

Andererseits definieren wir die Lage des Jupitersphäroides, welche gegeben sei durch die Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators auf der Jupiterbahn Ψ, und durch die Neigung des Aequators gegen die Bahn: Θ.

Wir projicieren die Figur wieder auf die vorige Normalebene und in dieser Ebene zählen wir in demselben Sinn wie früher vom Einschnitt der Ebene: Sonne, Jupiter, Erde aus bis zum Einschnitt der Jupiterbahn den Winkel e, von hier aus bis zur grossen Axe der Jupiterellipse den Winkel λ_0, von hier bis zum scheinbaren Radiusvector des Trabanten den Winkel χ_0, endlich sei ψ_0 die Höhe der Sonne über der Aequatorebene. Dann hat man für das gesuchte ε die Gleichung

$$54) \qquad \varepsilon = e + \lambda_0 + \nu_0$$

wobei, wenn c die Excentricität des Sphäroides bedeutet

$$55) \qquad \operatorname{cotg} \nu_0 = \operatorname{cotg} \chi_0 (1 - c^2 \cos^2 \psi_0).$$

Da nun die Abplattung p unsicher ist um eine Grösse vom Rang ihres Quadrates, so ist auch genau genug

$$56) \qquad \nu_0 = \chi_0 + c^2 \cos^2 \psi_0 \sin \chi_0 \cos \chi_0$$

und da man hier $\cos^2 \psi_0 = 1$ setzen darf, so folgt durch Substitution in 54)

$$\varepsilon = e + \lambda_0 + \chi_0 + c^2 \sin \chi_0 \cos \chi_0.$$

Nun ist streng

$$\lambda_0 + \chi_0 = \lambda + \chi = \omega$$

und im letzten Glied darf man statt c^2 die doppelte Abplattung $2p$, statt χ_0 aber ω setzen. Demnach ist jetzt

$$\varepsilon = e + \omega + p \sin 2\omega$$

und hier ist noch e unbekannt. Diese Grösse lässt sich in der Nähe der Opposition nur unsicher bestimmen. Indessen ist in diesem Fall der Phasenwinkel α klein und eine genaue Bestimmung des ε nicht nöthig. Diesen Umstand kann man in den Formeln ausdrücken und zugleich eine Vereinfachung der Rechnung erzielen, wenn man sich erinnert, dass ε nur in der Verbindung vorkam: $\operatorname{tg} \alpha \cos \varepsilon$. Wir setzen

$$x = \omega + p \sin 2\omega$$
$$\varepsilon = e + x$$

und stellen uns die Aufgabe, $\sin \alpha \cos \varepsilon$ zu berechnen. Unter Rücksicht auf die letzte der Gleichungen 50) hat man

$$57) \qquad \sin \alpha \cos \varepsilon = \delta \sin \alpha' \cos \varepsilon = \delta (\sin \alpha' \cos e \cos x - \sin \alpha' \sin e \sin x)$$

und jetzt zeigt die Betrachtung eines sphärischen Dreiecks, dessen Ecken bestimmt sind durch die von der Sonne aus gezogenen Geraden nach Erde, Jupiter und dem aufsteigenden Knoten der Jupiterbahn auf der Ekliptik, dass folgende Relationen bestehen, in welchen Ω und i Knoten und Neigung der Jupiterbahn gegen die Ekliptik bezeichnen und im Uebrigen die frühere Bezeichnungsweise festgehalten ist:

$$\sin\alpha' \cos e = \cos(L_e - \Omega)\sin(L - \Omega) - \sin(L_e - \Omega)\cos(L - \Omega)\cos i$$
$$\sin\alpha' \sin e = \sin(L_e - \Omega)\sin i.$$

Dies substituieren wir in 57) und beachten, dass wegen $i = 1^0 19'$ $\cos i = 1$ gesetzt werden darf. Dann hat man

58) $$\sin\alpha \cos\varepsilon = \delta(\sin(L - L_e)\cos x - \sin(L_e - \Omega)\sin i \sin x)$$
$$x = \omega + p \sin 2\omega$$

und um $\operatorname{tg}\alpha \cos\varepsilon$ zu finden, multiplicieren wir den vorstehenden Ausdruck noch mit

59) $$\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\delta^2 \sin^2\alpha'$$

wo α' durch 50) gegeben ist.

Nun ist δ etwa $= 1/5$, $p = 1/16$, $\sin i = 0.023$, überdies ist der Ausdruck $\operatorname{tg}\alpha \cos\varepsilon$ in II)* dividirt durch π; wenn man also bei dem bekannten geringeren, aber genügenden, Genauigkeitsgrad stehen bleibt, so darf man die Correction 59) sowie das zweite Glied in jeder der beiden Gleichungen 58) unterdrücken und ferner statt L einfach L_i schreiben; dann folgt

$$\operatorname{tg}\alpha \cos\varepsilon = \delta \sin(L_i - L_e)\cos\omega.$$

Jetzt können wir auch η berechnen. Es ist nämlich

60) $$\eta = \eta_1 + \nu_0 - \chi_0$$

und man findet χ_0, wenn man sich im System 51) statt ψ, λ, J, N geschrieben denkt ψ_0, λ_0, Θ, Ψ und dann die Gleichung $\chi_0 = \omega - \lambda_0$ anwendet; dann ist ν_0 durch 56) und überdies η_1 durch 53) gegeben.

Kürzer, aber nicht ganz streng, kann man $\nu_0 - \chi_0$ aus 56) entnehmen und in 60) substituieren. Hierdurch findet sich

$$\eta = \eta_1 + c^2 \sin\chi_0 \cos\chi_0.$$

Für die Zwecke der Gleichung III a)* darf man dann χ_0 mit χ vertauschen, so dass

$$\frac{\cos\eta_1}{\cos\eta} = 1 + c^2 \sin^2\chi;$$

in III)* aber darf man statt η einfach χ schreiben, selbst beim vierten Trabanten, wenn man im letzteren Falle erwägt, dass hier wegen des breiten Halbschattens $x^2 : R^2$ höchstens $= 0.1$ werden kann.

Um zu prüfen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit man die Grössen v und s mit Hilfe der Bessel'schen Tafeln bestimmen muss, differenzieren wir die erste Gleichung 52). Zunächst ist

$$d\omega = \sin(L - v)\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 s}ds + \cos(L - v)\frac{\sin^2\omega}{\operatorname{tg} s}dv.$$

Nun ist näherungsweise

$$a \sin s = a_0 \sin\omega.$$

Ausserdem ist $L - v$ ein kleiner Winkel, für dessen Cosinus und Sinus wir deren Maximalwerthe 1 und $a_0 : a$ setzen; dann folgt

$$d\omega = \frac{a}{a_0}ds + \frac{a}{a_0}\sin\omega\, dv$$

oder, wenn wir die Differentiale der rechten Seite in Secunden messen und statt $\sin\omega$ die Einheit setzen

$$d\omega = \frac{a}{a_0}\sin 1''(dv + ds)''$$

d. h. es ist für die einzelnen Trabanten

$$100\, d\omega = \frac{(dv+ds)''}{362''}, \quad \frac{(dv+ds)''}{227''}, \quad \frac{(dv+ds)''}{142''}, \quad \frac{(dv+ds)''}{81''}$$

woraus man bei einem Blick auf die Bessel'schen Tafeln sieht, dass man, um v zu bestimmen, nur die wichtigsten Correctionsglieder der mittleren Länge ϑ mitzunehmen braucht.

Wir haben jetzt für eine strenge, in allen Fällen genügende Berechnung der Hilfsgrössen folgende Vorschrift: Man nimmt v, s, J, N aus den Bessel'schen Tafeln, gemäss dem Beispiel S. 37 und den Bemerkungen S. 40 und 68. Dann rechnet man nach folgenden Formeln:

IV) $\operatorname{tg}(L-\Omega) = \dfrac{\operatorname{tg}(L_i - \Omega)}{\cos i}$

$$\sin\psi = \sin J \sin(L-N) \qquad \sin\psi_0 = \sin\Theta\sin(L-\Psi)$$

$$\sin\lambda = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}(L-N)} \qquad \sin\lambda_0 = -\frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(L-\Psi)}$$

$$= -\frac{\cos(L-N)}{\cos\psi}\sin J \qquad = -\frac{\cos(L-\Psi)}{\cos\psi_0}\sin\Theta$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg} s}{\sin(L-v)}$$

$$\chi = \omega - \lambda \qquad \chi_0 = \omega - \lambda_0$$

$$\operatorname{tg}\tau = \sin^2\psi \operatorname{cotg}\chi \qquad \operatorname{cotg}\nu_0 = (1-c^2\cos^2\psi_0)\operatorname{cotg}\chi_0$$

$$\eta_1 = \chi + \tau$$

$$\nu_1 = \nu_{11} + \nu_0 - \chi_0$$

$$\delta = \frac{\Delta(SE)}{\Delta(EJ)}$$

$$\cos\alpha' = \cos B_i \cos(L_i - L_e)$$

$$x = \omega + p\sin 2\omega$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon = \delta\left\{\sin(L_i - L_e)\cos x - \sin(L_e - \Omega)\sin i \sin x\right\}\left(1 + \frac{1}{2}\delta^2\sin^2\alpha'\right).$$

Dagegen hat man bei einer Genauigkeit von 0.01 hinreichend scharf, parallel den früheren Systemen

IV)* $\sin\psi = \sin J\sin(L_i - N)$

$$\sin\lambda = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}(L_i - N)} = -\frac{\cos(L_i - N)}{\cos\psi}\sin J$$

$\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}$ ψ und λ in der Reihe von 0^0

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg} s}{\sin(L_i - v)},$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{bei pos. } \psi\text{: } \omega \text{ im 1. oder 2. Quadr.}\\ \text{bei neg. } \psi\text{: } \omega \text{ im 3. oder 4. Quadr.}\end{array}\right.$

$$\chi = \omega - \lambda$$

$$\eta = \chi$$

IVa)* $\dfrac{\cos\nu_1}{\cos\eta} = 1 + c^2\sin^2\eta$

IVb)* $\delta = \dfrac{\Delta(SE)}{\Delta(EJ)}$

$$\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon = \delta\sin(L_i - L_e)\cos\omega.$$

Im einzelnen Fall ist bei Bestimmung der v und s aus den Bessel'schen Tafeln zu bemerken, dass einem Fehler in ω von 0.01 (den Radius als

Einheit genommen) ein Fehler $dv + ds$ entspricht, welcher für die einzelnen Trabanten

362 227 142 81

Bogensecunden beträgt.

Man kann noch eine andere Methode zur Berechnung der Hilfsgrössen angeben, welche für den ersten Augenblick sogar natürlicher erscheint, da sie die Berechnung der scheinbaren Trabantenörter erspart. Um jedoch den vorigen Formeln gegenüber eine grössere Bequemlichkeit zu erreichen, muss man etwas an Strenge opfern. Deshalb werden wir die zweiten Potenzen aller kleinen Grössen vernachlässigen.

Fällt zunächst die Trabantenbahn zusammen mit dem Aequator Jupiters, und denkt man sich Jupiter als Kugel, so ist

$$\sin\chi = \frac{\sqrt{a^2 - a_0^2}}{a_0} \operatorname{tg} \psi_0 .$$

Wegen der Abplattung kommt aber hierzu ein Increment

$$d\chi = p \frac{\sin^3\chi}{\cos\chi}$$

und da die Aequatorebene und die Bahnebene gegen einander geneigt sind, so muss man statt ψ_0 noch $\psi = \psi_0 + d\psi$ setzen. Da überdies $\eta = \chi$ war, so hat man jetzt das System:

IV)** $\sin\psi_0 = \sin\Theta \sin(L_i - \Psi)$ oder $\sin\psi = \sin(\psi_0 + d\psi) = \sin J \sin(L_i - N)$

$\sin\chi' = [0.7490]\operatorname{tg}\psi;\ [0.9548]\operatorname{tg}\psi;\ [1.1592]\operatorname{tg}\psi;\ [1.4051]\operatorname{tg}\psi$

$\chi'' = p \frac{\sin^3\chi'}{\cos\chi'}$

$\chi = \chi' + \chi''$

$\eta = \chi$

IVa)** wie IVa)*

IVb)** wie IVb)*, nur $\omega = \chi$.

Diese Formeln, in welchen die Klammergrössen Logarithmen bedeuten, eignen sich vorzugsweise zu Ueberschlagsrechnungen, da man eventuell die Correctionsglieder $d\psi$ und χ'' weglassen kann, und da ψ_0 immer ein Näherungswerth ist, welcher allen Trabanten gemeinsam ist und sich

nur langsam ändert. In welchen Fällen sie zu einer scharfen Reduction genügen, und in welchen sie durch die IV)* IVa)* IVb)* ersetzt werden müssen, lehrt ein Blick auf die Formeln III)* und IIIa)*.

8.

Es bleibt noch übrig, die Verhältnisse $R' : R$, $R : R''$, $R : a_0$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck notieren wir einige Constanten, welche schon den früheren, zum Theil angeführten, Ueberschlagsrechnungen zu Grunde lagen. Als neue Bezeichnungen treten noch auf: σ, der scheinbare Halbmesser der Sonne in der mittleren Entfernung der Erde gesehen, ι und τ diejenigen des Jupiter und des Trabanten, von der Sonne aus gesehen in der mittleren Entfernung des Jupiter. Diese letztere Entfernung, bezogen auf die grosse Halbaxe der Erdbahn als Einheit, heisse α. Es ist

$$\Omega = 98^0\,56'\,17''.0 + 36''.382\,(t - 1850) \quad i = 1^0\,18'\,41''.4 - 0''.205\,(t - 1850)$$

$$\Psi = 313^0\,21'\,55'' + 49''.8 \quad (t - 1750) \quad \Theta = 3^0\,4'\,5'' + 0''.022\,(t - 1750)$$

$$\alpha = 5.20256 \qquad \log \alpha = 0.716217$$

$$\iota = 19''.066 \qquad p = \frac{1}{15.7} \qquad e^2 = 0.1233$$

$$\sigma = 961''.2$$

$\tau =$	$0''.540$	$0''.455$	$0''.768$	$0''.641$
$\frac{a}{a_0} =$	5.69849	9.06655	14.46189	25.43590

Die Werthe $a : a_0$ sind nach Laplace gegeben, die τ nach Engelmann; ι und p sind Mittelwerthe aus Angaben von Vogel und Lohse.

Nun bezeichnen wir die den mittleren Entfernungen a und α entsprechenden wahren Entfernungen mit r und ϱ. Dann bedenken wir, dass 1) $R' : R$ gleich ist dem Verhältniss $\sigma : \tau$, wenn diese Grössen reducirt sind einerseits auf die wahre Entfernung Jupiter-Sonne, andererseits auf die kürzeste Distanz des Trabanten vom Jupiterrande, 2) dass R'' der Krümmungsradius der Jupiterscheibe in unserer Projectionsebene war, 3) dass $R : a_0$ durch IIIa) gegeben war. Hiernach hat man

V)
$$\frac{R'}{R} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{r}{a} \cdot \frac{\sigma\iota\sqrt{a^2 - a_0^2}}{206265\,\tau\alpha a_0}$$

$$\frac{R}{R''} = \frac{\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi_0}}{(1 - e^2\cos^2\psi_0\cos^2\varphi_0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\tau}{\iota}$$

Va) $$\frac{R}{a_0} = 2\pi \cos^2\psi \sin\varphi \cos\chi \frac{\cos\eta}{\cos\eta_1} \frac{a}{a_0} \frac{T}{T'}$$

Aus diesen Formeln folgt bei der bekannten Beschränkung der Genauigkeit, indem man in jeder der beiden ersten den ersten Factor $= 1$ setzt

V)* Trabant	I	II	III	IV
$\frac{R'}{R}$	0.177	0.338	0.321	0.677
$\frac{R'^2}{R^2}$	0.032	0.114	0.103	0.459
$\log\frac{R'^2}{R^2}$	8.505	9.057	9.013	9.662
$\frac{R}{R''}$	0.028	0.024	0.040	0.034
$\log\frac{R}{R''}$	8.452	8.378	8.605	8.527

Va)* $$\frac{R}{a_0} = 2\pi \cdot 0.984 \cos\chi \frac{a}{a_0} \frac{\cos\eta}{\cos\eta_1} \frac{T}{T'}$$ bei Trabant I;

$$\frac{R}{a_0} = 2\pi \cos\chi \frac{a}{a_0} \frac{\cos\eta}{\cos\eta_1} \frac{T}{T'}$$ bei Trb. II, III, IV.

Hiermit ist die Aufgabe nach jeder Seite hin erschöpft. Die Durchmesser der Trabanten sind nur ungenau bekannt, wodurch die vorigen Constanten unsicher werden. Man kann aber die Durchmesser photometrisch bestimmen und dann wird man einen Theil der Constanten neu berechnen müssen.

9.

Nach allem Bisherigen kann man den Gang einer Untersuchung in folgender Weise skizzieren:

Man wird vor bez. nach der Verfinsterung möglichst genau die totale Lichtstärke des Trabanten bestimmen, ferner wird man während der Abbez. Zunahme der Lichtstärke so oft als möglich Messungen machen und die zugehörige Zeit t notieren. Diese Lichtstärken drückt man in Einheiten der totalen Helligkeit aus; wir bezeichnen sie mit h. Nun berechnet man zunächst die erforderlichen Hilfsgrössen je nach Bedürfniss durch die Formeln IV)* IVa)* IVb)* oder durch IV)** IVa)** IVb)**.

Dann reducirt man aber nur diejenigen Messungen weiter, bei welchen der Halbschatten seiner ganzen Breite nach auf dem Trabanten lag. Diesen extremen Fällen entsprechen folgende Werthe des h:

	Trabant		I	II	III	IV
61)	0.500	$\pm$	0.473	0.410	0.418	0.206
	$+\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon$	mal	[9.2631]	[9.6243]	[9.5973]	[9.9282]

wo die Klammergrössen Logarithmen sind. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass man auch diese Constanten mit verbesserten Durchmesserwerthen neu bestimmen wird. Sodann ist die Gleichung II)* nach $x:R$ aufzulösen. Zu diesem Zweck schreiben wir dieselbe in der Form

$$h = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{x}{R} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{R^3} - h'$$

$$62) \qquad -h' = \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2}\frac{x}{R} + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\cos\varepsilon\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

setzen zuerst $h' = 0$ und lösen die erste dieser beiden Gleichungen auf. Dieselbe hat 3 reelle Wurzeln, von denen nur eine brauchbar ist. Sie wird gefunden durch

$$63) \qquad \cos\varphi = 2h - 1, \quad 0 < \varphi < 180^0$$

$$\frac{x}{R} = -2\cos\left(60^0 + \frac{1}{3}\varphi\right)$$

Mit Hilfe dieses Werthes berechnet man das Correctionsglied h' durch 62) und rechnet dann abermals nach 63), nachdem man statt h gesetzt hat $h + h'$; hierdurch hat man eine zweite Näherung, u. s. w. Die zweite Näherung wird in den meisten Fällen schon genügend genau sein. Hat man nun nur ein h, welches brauchbar ist, d. h. welches zwischen den Grenzen 61) liegt, so bestimmt man T mit Hilfe von IIIa)* und dann gibt die Formel III)* das gesuchte τ. Hat man aber zwei brauchbare Beobachtungen, so heisse die rechte Seite der Gleichung III)*, welche bekannt ist, n, und dann hat man die zwei Gleichungen

$$\tau + n_1 T = t$$
$$\tau + n_2 T = t_2$$

welche nach τ und T aufzulösen sind. In diesem Fall findet man ausser τ noch den Durchmesser R des Trabanten, wenn man die Gl. Va)* benutzt. Wie bei mehreren Beobachtungen zu verfahren ist, braucht nicht erst gesagt zu werden. Alle im Lauf dieser Rechnung sonst auftretenden Constanten sind in V)* gegeben.

Bei Austritten aus dem Schatten gelten alle Formeln unverändert fort. In diesem Fall wird sich T stets negativ ergeben.